

Latvijas Universitāte  
Fizikas un matemātikas fakultāte

## **Kvantu haosa un fāzu pāreju pētījumi kodolu modeļos**

Jevgenijs Proskurins

*Promocijas darba kopsavilkums*

Darbs veikts  
Latvijas Universitātes  
Cietvielu fizikas institūta  
Kodolreakciju laboratorijā

Zinātniskais vadītājs  
Dr.phys Tamāra Krasta

Rīga, 2010.gads

## Anotācija

Šis doktora disertācijas kopsavilkums ir veltīts kvantu fāzu pāreju un haosa koncepciju pielietošanai algebriskajos un ģeometriskajos kodolu struktūras modeļos.

Standarta bozonu mijiedarbības modeļa (IBM-1) ietvaros kodolu formas fāzu pārejas tiek pētītas, izmantojot atbilstošās enerģijas funkcionāļa izteiksmes, kas ir atkarīgas no kodola kvadrupolās deformācijas parametriem  $\beta$  un  $\gamma$ . Modeļa parametru vērtības, kas atbilst fāzu pāreju kritiskajām līnijām un punktiem, ir iegūtas precīzi risinot robežnosacījumu vienādojumus. Rezultāti ir salīdzināti ar vērtībām, kas iegūtas izmantojot Landau metodi – enerģijas funkcionāļa virzīšanu Teilora rindā. Izstrādātā kodolu formas fāzu pāreju analīzes metode ir pielietota IBM-1 modeļa vienkāršotās Kastēna versijas, IBM-1 hamiltoniāna  $O(6)$  robežgadījuma, kas ietver trīs-bozonu mijiedarbības locekļus, kā arī pilnā IBM-1 hamiltoniāna gadījumā. Kvantu haosa statistisko kritēriju – starplīmeņu enerģiju sadalījuma  $P(s)$ , un dinamisko kritēriju – perturbētā hamiltoniāna  $H$  stāvokļu viļņu funkciju entropijas  $W(\Psi_i)$  un neperturbētā hamiltoniāna  $H_0$  bāzes stāvokļu funkciju fragmentācijas platuma  $\kappa(\Phi_k)$  uzvedība ir pētīta atkarībā no kodola formas parametriem algebriskajā (vienkāršotajā IBM-1 Kastēna versijā) un ģeometriskajā (cietā triaksiālā rotatora) modelī. Īpaša uzmanība ir pievērsta modeļu parametru vērtībām kodolu formas fāzu pāreju kritisko līniju un punktu apkārtnē. Izstrādātās metodes ir izmantotas analizējot robežpārejai raksturīgās struktūras īpatnības, kas tika eksperimentāli novērotas  $A \sim 190$  apgabala volframa, osmija un platīna pāru-pāru kodoliem ar  $184 < A < 194$ .

Disertācijas rezultāti ir publicēti trīs rakstos recenzējamos žurnālos, kā arī vienā rakstā starptautiskās konferences materiālu krājumā. Vēl divi raksti ir iesniegti publicēšanai recenzējamos žurnālos. Viens žurnāla raksts ir nopublicēts vietējā zinātniskajā žurnālā. Disertācijas rezultāti ir ziņoti astoņos mutvārdu referātos un divās posteru sesijās kā starptautiskajās, tā arī vietējās zinātniskajās konferencēs. Pilnā disertācijas teksta bibliogrāfija satur 63 atsauces.

## 1. Ievads

Progress eksperimentālās tehnikas attīstībā, ļaujot pētīt atomu kodolus tālu no stabilitātes reģiona un pie augstām spina vērtībām, kā arī plaša uz grupu teorijas metožu balstītu kodolmodeļu izmantošana, īpaši divdesmit gadu laikā, pastiprināja interesi par kritisko parādību izpēti kodolstrukturā. Zinātniskā literatūra par kodolfiziku iekļauj daudzus rakstus, kas veltīti dažādiem kvantu fāzes pārejas (KFP) aspektiem un kvantu haosam (skat., piemēram, plašo pārskata rakstu, kura autori ir P.Cejnars un Ž.Žolī [1], un tajā esošās atsauces). Šajos pētījumos kodolteorētiķi pielieto koncepcijas un metodes, kas izstrādātas citām fizikālajām sistēmām: piemēram, KFP pētīšanai atomu kodolos, tiek izmantota klasiskā termodinamikas pieeja, tai skaitā Landau fāzu pāreju teorija.

Algebriskie modeļi ļauj pierakstīt sistēmas hamiltoniānu izmantojot Kazimira invariantus, kas pieder kādai integrējamai (regulārai) sistēmai, kas savukārt dod iespēju veikt fāzu pāreju skaitlisko analīzi atkarībā no izvēlētajiem kritiskajiem parametriem. Vispopulārākais no šādiem algebriskajiem kodola modeļiem ir standarta bozonu mijiedarbības modelis IBM-1 un tā vienkāršotā divu parametru Kastēna versija, kuru savos kvantu haosa un KFP pētījumos izmanto vairākums autoru.

Vēsturiski pirmie visnozīmīgākie rezultāti par kvantu haosu un KFP saistību IBM-1 ietvaros tika publicēti Y.Alhasida u.c. pētījumos [2, 3]. Viņi pētīja haosu pārpāra kodolu zemāko kolektīvo stāvokļu īpašībās (enerģijās un E2 pārejās) ieviešot vienkāršotu divu parametru IBM-1 hamiltoniānu. Šādas pieejas izmantošana ļāva pētīt pārejas starp trim IBM-1 robežgadījumiem, mainot vienu izvēlēto mainīgo. Šos pētījumus tālāk attīstīja P.Cejnars, Ž.Žolī un līdzstrādnieki [4, 5, 6, 7]. Darbā [4] tika ieteikts izmantot IBM-1 viļņu funkciju informācijas entropiju dinamiskās simetrijas robežgadījumu bāzē kā simetrijas pārkāpšanas mēru, raksturojot pāreju no viena sistēmas simetrijas veida uz citu. Sakarības starp kodola formas fāzu pārejām un viļņu funkciju entropiju tika analizētas izmantojot klasiskās enerģijas izteiksmi vienkāršotajai Kastēna IBM-1 versijai.

Nedaudz atšķirīgu pieeju KFP analīzei pilnajā IBM-1 versijā piedāvāja E.Lopezs -Moreno un O.Kastanos [8]. Viņi  $E_{cl}$  enerģijas virsmas analīzei izmantoja katastrofu teorijas formālismu un parādīja, ka līdzsvara konfigurācijas vispārīgākajā gadījumā var tikt klasificētas izmantojot tikai divus būtiskus kontroles mainīgos  $(r_1; r_2)$ , kas tiek atvasināti no pilnā IBM-1 hamiltoniāna parametriem.

Tomēr vienmēr pastāv iespēja, ka kādas iepriekš nenoskaidrotas detaļas, gan teorētiskas, gan eksperimentālas, var novest pie kādas parādības dziļākas izpratnes. Tāpēc mēs esam uzsākuši pētījumu jomā, kurā liekas bija pietiekami daudz zinātnisku publikāciju – KFP un kvantu haosa algebriskajos (IBM-1) un ģeometriskajos (cietais trīsasu rotators) kodolu modeļos. Vēl joprojām ir daži neatbildēti jautājumi, uz kuriem mēs centīsimies atbildēt. Viens no šādiem jautājumiem ir robeža, līdz kurai ir attaisnojama termodinamikas metožu izmantošana kodolu teorijas gadījumā, kad daļiņu skaits ir ierobežots. Tāpēc mēs izmantosim pieeju, kas ir alternatīva parasti pielietotai Landau fāzu pāreju teorijai. Pētot kvantu haosu visbiežāk izmantotie kritēriji ir starplīmeņu enerģiju attālumu sadalījums un viļņu funkciju entropija. Mēs centīsimies parādīt, ka bāzes stāvokļu fragmentācijas platums [9], kas tiek plaši izmantots reakciju teorijā, var tikt veiksmīgi pielietots kā kvantu haosa kritērijs arī kodolu struktūras modeļiem. Izstrādātās KFP un kvantu haosa pētījumu teorētiskās metodes tiks pielietotas eksperimentāli novēroto struktūras pārejas īpašību analīzei pāra-pāra kodolos, kas pieder deformācijas apgabalam pie  $A \sim 190$ , kuru pēta LU CFI Kodolreakciju laboratorijas fiziķi.

Arīdzan tādu fundamentālu jēdzienu izpratnei kā kvantu sistēmas fāzu pārejas un sakarības starp sistēmas simetrijām un kvantu haosu, tāpat kā šo koncepciju izmantošanai sarežģīta fizikāla objekta – atoma kodola – pētīšanai, ir ievērojama metodoloģiskā un izglītojošā vērtība. Tādējādi, šī fizikas doktora disertācija kalpo arī personīgās kvalifikācijas celšanai un ir pamats turpmākajiem sarežģītāku un aktuālāku kodolfizikas vai kādas citas kvantu sistēmas teorētiskajiem pētījumiem.

## 1.1. Pamatpriekšstati par kodola formas fāzu pārejām un kvantu haosu

Vienotā modeļa pieejas ietvaros kodola serde tiek aprakstīta kā nespējama „kodolšķidrums” piliens. Valences nukloni kustas vidējā laukā, ko veido serde, kam līdzsvara pamatstāvoklī var būt sfēriska vai deformēta forma. Kodola serdes kolektīvos ierosinājumus var aprakstīt, izmantojot kolektīvos mainīgos  $\alpha_{\lambda\mu}$ , kas nosaka kodola virsmas novirzi no sfēriskās līdzsvara formas [10]:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right], \quad (1)$$

kur  $R_0$  ir rādiuss ekvivalentā tilpuma sfērai. Kvadrupolās deformācijas gadījumā ( $\lambda = 2$ ) kodola formu iekšējā atskaites sistēmā raksturo divi mainīgie  $\beta$  un  $\gamma$ ; kodola forma ir izstiepta, kad  $\beta > 0$ , un saspiesta, kad  $\beta < 0$ . Asimetrijas parametrs  $\gamma$  norāda kodola serdes novirzi no aksiālās simetrijas: kad  $\gamma = 0^\circ, 60^\circ, \dots$ , serde ir aksiāli simetriska.

Bora-Mottelona modeļa ietvaros [11] tiek aprakstīti aksiāli simetriski deformētās serdes kolektīvie ierosinājumi – rotācija un vibrācijas, kas izraisa kodola dinamisko deformāciju. Šie kolektīvie ierosinājumi mijiedarbojas ar valences nuklonu viendabīgas brīvības pakāpēm. Ģeometriskā pieeja ir bijusi īpaši veiksmīga deformēto kodolu gadījumos masas skaitļu  $140 < A < 200$  apgabalā.

Citu ģeometrisko modeli 1958.gadā piedāvāja A.S.Davidovs un G.E.Filipovs [12]. Viņi pieņēma, ka pastāv kodoli, kam ir neaksiālā pamatstāvokļa deformācija – cietie trīsasu rotatori. Šajā gadījumā kolektīvās koordinātas  $a_0, a_2$  pieņem fiksētas vērtības, kas atšķiras no nulles, un kodola serdei ir trīs atšķirīgi inerces momenti. Kolektīvais pāra-pāra kodola hamiltoniāns  $H^{3ax}$  cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumā var tikt uzrakstīts (skat., piem., [10]) kā aksiāli simetriskā rotatora hamiltoniāns  $H^{ax_0}$  plus perturbācijas saskaitāmais.  $H^{3ax}$  matricas tiek diagonalizētas aksiāli simetriskā rotatora īpašfunkciju bāzē. Kodola trīsasu rotatora modelis ir interesants kvantu haosa pētījumiem dēļ tā analogijas ar klasiskās mehānikas integrējamo sistēmu – cieto asimetrisko vilciņu (skat., piemēram, [13, 14]).

Alternatīva fenomenoloģiskā pieeja kodola serdes aprakstam ir bozonu mijiedarbības modeļi (IBM) [15]. Galvenā IBM ideja ir tā, ka kodola serde sastāv no bozoniem – nuklonu pāriem ar noteiktu leņķiskā momenta vērtību  $l$ . Bozonu skaitu  $N_b$  parasti nosaka pēc nuklonu stāvokļu (daļiņu vai caurumu) pāru skaita ārpus tuvākās noslēgtās protona un neitronu čaulas dotajam kodolam ( $(Z, N) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ ). Kodola kolektīvais hamiltoniāns iekļauj viena bozona ierosinājumus un divu bozonu mijiedarbības. Valences nuklonu vienas daļiņas brīvības pakāpes nepāra kodola gadījumā (bozonu-fermionu mijiedarbības modelis (IBFM)) un nepāra-nepāra kodola gadījumā (bozonu-fermionu-fermionu mijiedarbības modelis (IBFFM)) parasti apraksta

tāpat kā vienotā kodola modeļa gadījumā. Bozonu mijiedarbības modeļu matemātiskais aparāts ir balstīts uz grupu teorijas pielietošanu, izmantojot bozonu un fermionu sistēmas pilno brīvības pakāpju raksturošanai unitāro grupu un apakšgrupu algebriskās metodes.

Vienkāršākajā IBM versijā – IBM-1 modelī (vai standarta IBM), tiek izmantoti divu veidu bozoni: viens  $s$ -bozons ( $l=0$ ) un pieci  $d$ -bozoni ( $l=2$ ). IBM-1 hamiltoniāna [15, 16] viļņu funkcijas tiek klasificētas saskaņā ar pilnībā simetriskajām grupas  $U(6)$  reprezentācijām  $[N_b]$  jebkurā no trijām ķēdēm:

$$U(6) \supset \begin{cases} U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \\ O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \\ SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \end{cases} \quad (2)$$

Izmantojot atbilstošo apakšgrupu Kazimira operatorus pilno IBM-1 hamiltoniānu var pierakstīt multipolā izvirkzījuma veidā, kuru piedāvāja F.Iačello un A.Arima (skat., piemēram, [15, 17]):

$$H_{sd} = \varepsilon' n_d + \frac{1}{2} \eta (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{2} \kappa (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) - 5\sqrt{7} \omega \left[ [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(3)} \times [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(3)} \right]^{(0)} + 15\xi \left[ [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(4)} \times [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(4)} \right]^{(0)}, \quad (3)$$

kur kvadrupolā momenta operators  $\tilde{Q}$  ir dots kā [18]

$$\mathbf{Q}(\chi) = [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{s}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(2)} + \chi [\mathbf{d}^+ \times \tilde{\mathbf{d}}]^{(2)}, \quad (4)$$

bet  $\varepsilon', \eta, \kappa, \omega, \xi$  un  $\chi$  ir modeļa parametri.

Pilnā IBM-1 hamiltoniāna (3) enerģijas un viļņu funkcijas iegūst diagonalizējot to jebkurā no trīs apakšgrupu ķēžu (2) īpašfunkciju bāzēm. Visas trīs ķēdes ir līdzvērtīgas. Diagonalizējamās matricas rangs  $n$  nosaka pilnais bozonu skaits  $N_b$ . Neperturbētos hamiltoniānus, kas satur tikai atbilstošās apakšgrupu ķēdes diagonālos elementus (Kazimira invariantus) tiek saukti attiecīgi par  $U(5)$ ,  $O(6)$  un  $SU(3)$  IBM-1 robežgadījumumiem, kas parasti tiek saistīti ar kodola serdes vibrācijas, asimetriskā ( $\mathcal{Y}$ -nestabilā) rotatora un aksiāli simetriskā rotatora ierosinājumiem [15, 16]. Vispārīgākā un visbiežāk izmantotā IBM-1 hamiltoniāna diagonalizācijas bāze ir sfēriskais  $U(5)$  vibrācijas robežgadījums.

Pēdējo desmit gadu laikā liela uzmanība tiek pievērsta termodinamiskajām fāzu pārējām galīgajās sistēmās, tādās kā Bozes-Einšteina kondensāti, atomu klasteri, u.c. Priekšstats par kvantu fāzu pārējām (KFP) lielākoties ir saistīts ar mijiedarbojošos kvantu objektu kritisko parādību izpēti pie nulles temperatūras, kad vienīgais iespējamais kārtības pārkāpuma iemesls ir kvantu fluktuācijas. Tad iespējams novērot pāreju starp diviem atšķirīgiem pamatstāvokļa viļņu funkcijas tipiem (skat., piemēram, [1]). Šāda pāreja starp  $H(0)$  un  $H(1)$  fāzēm tiek aprakstīta ar perturbācijas locekļa izmaiņu, kam iespējams sekot, izmantojot bezdimensionālo kontroles mainīgo  $\rho$ , ko parasti normalizē, lai tas ietilptu intervālā  $\rho \in [0,1]$ :

$$H(\rho) = H_0 + \rho V = (1 - \rho)H(0) + \rho H(1). \quad (5)$$

Kritiskā punkta šķērsošana parasti tiek pētīta bezgalīga izmēra robežgadījumā, kad daļiņu skaits  $N \rightarrow \infty$ .

Atoma kodola gadījumā klasiskās termodinamiskās fāzu pārejas tiek pētītas pie augstām ierosinājuma enerģijām un/vai augstām rotācijas frekvencēm. Pamatstāvoklī un pie zemām enerģijas un spina vērtībām ir iespējams novērot kodola formas izmaiņas, ko parāda kodola kolektīvās potenciālās enerģijas  $V(\beta, \gamma)$  izteiksmes minimums  $(\beta, \gamma)$  fāzu telpas diagrammā (skat., piemēram, [10]). Tad iespējams pētīt pārejas starp izstiepto  $\beta > 0$ , saspiesto  $\beta < 0$  un sfērisko  $\beta = 0$  kodola formām. Potenciālās enerģijas virsmas minimuma analīze atkarībā no izvēlēta kodola modeļa parametriem ļauj pētīt kodolu formas fāzu pārejas, izmantojot vai nu Landau fāzu pāreju teoriju [7], vai katastrofu teorijas pieeju [8].

IBM-1, pateicoties tā salīdzinoši vienkāršai struktūrai, kuru nosaka algebriskās simetriju īpašības, kā arī skaidri izteiktai atkarībai no  $N$  un  $Z$  caur kopējo bozonu skaitu  $N_b$ , dod iespēju analizēt KFP plašā kodolu apgabalā. Šīs pārejas ir iespējams pētīt, apskatot pilnā IBM-1 hamiltoniāna sadalīšanu integrējamās  $U(5)$ ,  $O(6)$  un  $SU(3)$  robežgadījumu hamiltoniānos  $H_0$ , un perturbācijas locekļos, kas ir atkarīgi no izvēlētajām kontroles parametru vērtībām. Dziļāku ieskatu par kodola formu fāzu pārejām var gūt, pētot izvēlēto algebrisko modeļu klasiskās enerģijas funkcionāla izteiksmes, kas iegūtas  $N_b \rightarrow \infty$  robežgadījumā (skat., piemēram, [19]). Līdzko ir zināma izmantotās IBM-1 versijas klasiskās enerģijas funkcionāla izteiksme  $E_{cl}$ , ir iespējams izpētīt tās uzvedību kodola formas diagrammā  $(\beta, \gamma)$ , saistot to ar trim IBM-1 robežgadījumiem un izmantojot priekšstatus par pirmās un otrās kārtas KFP (skat., piemēram, [20]).

Haosa problēma kvantu fizikā joprojām ir diskusiju temats (skat., piemēram, [21, 9]). Vairākums autoru atbalsta mēreno viedokli, uzskatot, ka jēdziens „kvantu haoss” nozīmē kvantu robežpāreju parādībām, kas raksturīgas klasiskās mehānikas haotiskajām sistēmām. Pētījumi šajā virzienā ir balstīti pārsvarā uz kvaziklasiskā tuvinājuma izmantošanu. Tomēr, tā kā kvantu mehānika ietver klasisko kā atsevišķu robežgadījumu, ir neiespējami definēt kvantu haosu konsekventā veidā no klasiskās mehānikas skatupunkta. Tāpēc pastāv otrs, strikti negatīvs viedoklis, kas pastāv uz to, ka nekāda kvantu haosa nav. Trešā pētnieku grupa uzskata, ka kvantu sistēmu izrādītajam haotiskumam ir tīri kvantu izcelsme, kas saistīta ar simetrijas īpašībām, kas raksturīgas atbilstošo kvantu sistēmu kustības (dinamikas) integrāļiem.

Iepriekš, apskatot KFP, jau tika atzīmēts, ka pie nulles temperatūras vienīgais iespējamais nekārtības rašanās iemesls ir kvantu fluktuācijas. Tāpēc KFP un kvantu haosa fenomeni ir tuvu saistīti, tāpat kā to pētījumu izejas postulāts, tas ir neintegrējama modeļa hamiltoniāna  $H$  sadalījums integrējamajā (simetriskajā)  $H_0$  daļā un perturbācijas locekļi  $V$ . Šredingera vienādojuma atrisinājums priekš  $H$  tiek iegūts diagonalizējot  $H$  matricu  $H_0$  īpašfunkciju bāzē, kas ļauj iegūt īpašvērtības  $E_i$  un īpašfunkcijas  $\Psi_i$  kā superpozīciju

$$\Psi_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \Phi_k, \quad (6)$$

kur  $c_{ik}$  ir sajaukšanās amplitūdas.

Vispopulārākais statistiskais kritērijs kvantu haosam ir starplīmeņu attālumu  $S = E_{i-1} - E_i$  sadalījums  $P(S)$ . Ir pierādīts [22], ka regulārām, pilnībā integrējamām kvantu sistēmām, ko apraksta nedeģenerēti hamiltoniāni, starplīmeņu attālumu sadalījums pieņem Puassona formu  $P_p(S) = \exp(-S)$ . Turpretī, klasiskās haotiskās sistēmas (Sinaja biljards) kvantu analoga starplīmeņu attālumi pakļaujas Vīgnera

sadalījumam  $P_w(S) = (\pi/2) \cdot S \cdot \exp(-\pi S^2/4)$ , kas atbilst Gausa ortogonālo ansamblu (GOA) statistikai nejaušo matricu gadījumā (skat., piemēram, [23]). Sistēmas pāreju no regulārā (integrējamā) stāvokļa uz haotisko (neintegrējamo) iespējams pētīt, izmantojot, piemēram, viena parametra Brodī sadalījumu [24]:

$$P_B(S) = aS^\zeta \exp(-bS^{\zeta+1}), \quad (7)$$

kur  $a = (\zeta + 1)b$  un  $b = \left\{ \Gamma\left(\frac{\zeta + 2}{\zeta + 1}\right) \right\}^{\zeta+1}$ . Sadalījuma formu nosaka Brodī parametra  $\zeta$

vērtība: kad  $\zeta = 0$ , tiek iegūts Puassona sadalījums; kad  $\zeta = 1$  – Vīgnera sadalījums.

Vispopulārākais dinamiskais kvantu haosa kritērijs ir viļņu funkciju Šenona informācijas entropija, ko definē šādi [4]:

$$W(\Psi_i) = - \sum_{k=1}^n |c_{ik}|^2 \cdot \ln(|c_{ik}|^2), \quad (8)$$

raksturojot integrējamā (regulārā) hamiltoniāna  $H_0$  īpašfunkciju  $\Phi_k$  sajaukšanos perturbētā hamiltoniāna  $H$  viļņu funkcijās  $\Psi_i$ . Minimālā viļņu funkciju entropijas vērtība  $W(\Psi_i)^{\min} = 0$  atbilst nesajauktam stāvoklim, kura viļņu funkcijas sakrīt ar  $H_0$  īpašfunkcijām ( $\Psi_i = \Phi_k$ ). Teorētiski iespējamā maksimālā entropijas vērtība  $W(\Psi_i)^{\max} = \ln(n)$  atbilst gadījumam, kad perturbētā hamiltoniāna  $H$  viļņu funkcija ir vienmērīgi sadalīta (fragmentēta) pa visiem regulārā hamiltoniāna  $H_0$  bāzes stāvokļiem, t.i., visas sajaukšanās amplitūdas ir  $|c_{ik}|^2 = 1/n$ .

Cits dinamiskais kvantu haosa kritērijs, ko piedāvāja V.Bunakovs [9], ir bāzes stāvokļu fragmentācijas platums  $\kappa(\Phi_k)$ . Šī kritērija vērtība kāda regulāra hamiltoniāna  $H_0$   $k$ -tajam bāzes stāvoklim  $\Phi_k$  ir definēta [9, 25] kā  $\Phi_k$  fragmentācijas platuma ( $\Gamma_{spr}(k)$ ) pa perturbētā hamiltoniāna  $H$  stāvokļiem  $\Psi_i$  attiecība pret regulārās sistēmas īpašvērtību  $\varepsilon_k$  vidējo sadalījumu  $D_0$ :

$$\kappa(\Phi_k) = \Gamma_{spr}(k)/D_0. \quad (9)$$

Tomēr pastāvēt nosacījumam

$$|c_{i=k,k}|^2 < 0.5, \quad (10)$$

kas tiek uzlikts sajaukšanās amplitūdām, kas izmantotas  $\kappa(\Phi_k)$  novērtēšanai, šo kritēriju nevar izmantot mazu perturbāciju gadījumā. Kritērijs  $\kappa(\Phi_k)$  ļauj raksturot sistēmas dinamisko kvantu haosa stāvokli kā: a) mīkstā haosa gadījumu, kad  $0 < \kappa(\Phi_k) < 1$ ; b) cietā haosa gadījumu, kad  $\kappa(\Phi_k) \geq 1$ . Klasiskajā robežgadījumā bāzes stāvokļu fragmentācijas platums kļūst vienāds [9] ar labi pazīstamo klasisko haotiskuma raksturlielumu – Ļapunova eksponenti  $\lambda$ .

## 1.2. Izpētes darba mērķi un metodes

Problēmas, ko paredzēts atrisināt šīs disertācijas ietvaros var tikt definētas šādi:

1) iegūt precīzās analītiskās izteiksmes klasiskās enerģijas funkcionāla  $E_{cl}$  minimuma nosacījumiem atkarībā no kodola kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  un pielietot iegūtās izteiksmes kodola formas fāzu pāreju kritisko līniju un punktu analīzei vairāku vienkāršotu IBM-1 versiju gadījumā kā arī pilnā IBM-1 hamiltoniāna gadījumā, salīdzinot rezultātus ar tiem, kas iegūti, izmantojot Landau fāzu pāreju teorijas pieeju, kad  $E_{cl}$  izvirzījuma augstākās kārtas locekļi tiek atmesti;

2) analizēt un salīdzināt statistisko un dinamisko kvantu haosa kritēriju izturēšanos atkarībā no kodola kvadrupolās deformācijas parametriem un formas fāzu pārejam pāra-pāra kodola algebriskā IBM-1 modeļa un ģeometriskā cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumos;

3) novērtēt iespēju izmantot bāzes stāvokļu fragmentācijas platumu  $\kappa(\Phi_k)$  kā dinamisko kvantu haosa kritēriju algebriskajiem (IBM-1) un ģeometriskajiem (cietā trīsasu rotatora) kodolu struktūras modeļiem;

4) pielietot izstrādāto teorētisko metodi izpētīt kodola formas fāzu pāreju no izstieptās uz saspiesto, kas ir eksperimentāli novērojama volframa, osmija un platīna izotopu ķēdēs masas skaitļa  $A \sim 190$  apgabālā.

Lai iegūtu un pētītu precīzu analītisku risinājumu klasiskās enerģijas funkcionāla minimuma problēmai un veiktu salīdzinājumu ar citu autoru iegūtajiem rezultātiem, tika izvēlētas sekojošas IBM-1 versijas:

- vienkāršotā divu parametru Kastēna versija (skat., piemēram, [2, 4]);
- $O(6)$  – robežgadījuma hamiltoniāns ar iekļautiem kubiskiem  $d$ -bozonu mijiedarbības locekļiem [26, 27];
- $O(6)$  – robežgadījuma hamiltoniāns ar pievienotu kubisko kvadrupolā momenta locekli  $[\hat{Q}\hat{Q}\hat{Q}]^{(0)}$  [28] divos variantos: tāds, kas saglabā dinamisko  $O(6)$ -simetriju un  $O(6)$ -simetriju nesaglabājošs variants; pie kam, pēdējā gadījumā  $E_{cl}$  minimuma uzdevums iepriekš netika pētīts;
- pilnā IBM-1 versija [15].

Visām modeļu versijām precīzie analītiskie risinājumi  $E_{cl}$  minimuma nosacījuma vienādojumiem atkarībā no kodola kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  (pie  $\gamma = 0$ ) ir iegūti, izmantojot datorprogrammu paketi Mathematica. Šo minimumu uzvedība atkarībā no IBM-1 parametru vērtībām tika analizēta ņemot vērā KFP kritiskās līnijas un punktus. Rezultāti, kas tika iegūti izmantojot precīzā atrisinājuma metodi, tika salīdzināti ar analogiskiem rezultātiem, kas iegūti, izmantojot Landau fāzu pāreju teorijas pieeju. Efekti, kas rodas ievērojot  $E_{cl}$  izvirzījumā augstākās kārtas locekļus, tika novērtēti pilnās IBM-1 versijas gadījumā.

Standarta IBM-1 datorprogrammu pakete PHINT, ko izstrādājis O.Šoltens [17], tika izmantota IBM-1 modeļa hamiltoniāna diagonalizācijai, lai iegūtu īpašvērtības un īpašfunkcijas statistisko  $P(S)$  un dinamisko  $W(\Psi_i)$  un  $\kappa(\Phi_k)$  kvantu haosa kritēriju novērtēšanai, kā arī teorētisko enerģiju vērtību aprēķināšanai izvēlētajiem  $A \sim 190$  apgabala kodoliem.

Speciāli izveidotā datorprogramma tika izmantota cietā trīsasu rotatora modeļa hamiltoniāna matricu diagonalizācijai pie dažādām kodola spina  $I$  vērtībām. Modeļa



hamiltoniāna matricas tika iegūtas atkarībā no  $\gamma$  Davidova modeļa [29] gadījumā un no  $\gamma$  un  $\beta$  Bravina-Fedorova modeļa [30, 31] gadījumā.

Kvantu haosa kritēriju uzvedība tika pētīta sekojošu modeļu gadījumā:

- a) algebriskajā vienkāršotajā IBM-1 Kastēna versijā; un
- b) divos ģeometriskā cietā trīsasu (asimetriskā) rotatora modeļos.

Šiem modeļiem ir relatīvi vienkārša struktūra un mazs skaits modeļa parametru: viens parametrs  $\gamma$  – Davidova modeļa gadījumā un divi parametri – Bravina-Fedorova modeļa un vienkāršotās IBM-1 Kastēna versijas gadījumā. IBM-1 Kastēna versijas parametri  $(\eta, \chi)$  ir tieši saistīti ar kodola kvadrupolās deformācijas parametriem  $\beta, \gamma$  caur klasiskās enerģijas  $E_{cl}$  izteiksmēm. Tas dod iespēju salīdzināt kvantu haosa kritēriju uzvedību abu pieeju ietvaros: ģeometriskajā un algebriskajā.

Pie katras kodola spina  $I$  vērtības abu modeļu tipu hamiltoniāna matricām ir ierobežots rangs:  $n = n(I)$  cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumos un  $n = n(I, N_b)$  IBM-1 gadījumā. Tomēr jāņem vērā, ka, kamēr ģeometriskās pieejas ietvaros kodola spina  $I$  vērtības ir neierobežotas, IBM-1 gadījumā bozonu skaits  $N_b$  nosaka kodola spina maksimāli pieļaujamo vērtību. Augšējā ierobežojuma esamība ietekmē novēroto IBM-1 stāvokļu sajaukšanos pie augstākām spina vērtībām.

Attīstītās metodes tika pielietotas, lai analizētu sakarības starp formas fāzu pārejām un kvantu haosa kritērijiem izvēlēto kodolu gadījumā. Šim nolūkam mēs esam izvēlējušies 15 pāra-pāra volframa ( $Z = 74$ ), osmija ( $Z = 76$ ) un platīna ( $Z = 78$ ) izotopus ar  $184 \leq A \leq 194$ , kas pieder pārejas deformācijas apgabalam pie  $A \sim 190$ . Ir zināms, ka šo triju elementu kodolu formas mainās no stabilas izstieptās aksiālās simetrijas ( $^{184}W$ ) līdz asimetriskai  $\gamma$ -nestabilai formai ( $^{194}Pt$ ). Šis ir viens no apgabaliem, kur tradicionāli tiek pētīta formas fāzu pāreja no izstieptās uz saspiesto. Līdz ar to pastāv iespēja salīdzināt mūsu rezultātus gan ar eksperimentālajiem datiem, gan ar citu modeļu aprēķinu rezultātiem. Droši noteiktie eksperimentālie dati par izvēlēto kodolu ierosināto līmeņu enerģijām un elektromagnētiskajām īpašībām ir paņemti no ENSDF datu kompilācijas [32] uz 2010.gada janvāri. Tādējādi, savai analīzei mēs esam izmantojuši precīzāku eksperimentālo informāciju nekā tā, kas bija pieejama vairumam no iepriekšējiem pētījumiem.

Mēs esam aprobežojusies savos pētījumos ar atomu kodoliem, kas pieder  $184 \leq A \leq 194$  apgabalam un kam bozonu skaits  $N_b$  ir no 7 līdz 12, neiekļaujot eksperimentāli labi zināmos smagākos platīna izotopus. Šādu izvēli noteica: a) drošas eksperimentālās informācijas trūkums ENSDF datu bāzē attiecībā uz smagajiem volframa un osmija izotopiem; b) fakts, ka kvantu haosa kritēriju aprēķiniem ir nepieciešams pietiekams bāzes stāvokļu skaits; c) apstākļi, ka pie  $A \geq 194$ , kad neutronu skaits tuvojas noslēgtajai čaulai pie  $N = 126$ , ir grūti nošķirt, kura fāzu pāreja notiek - no izstieptās formas uz saspiesto vai no deformētā stāvokļa uz sfērisko.

Eksperimentālo datu analīze parāda, ka kodola formas fāzu pāreja  $W - Os - Pt$  apgabalā ir ļoti sarežģīta. Faktiski notiek divas paralēlas pārejas:  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  fāzu pāreja no deformētās izstieptās formas uz deformēto saspiesto formu un  $O(6) - E(5) - U(5)$  pāreja no deformēta stāvokļa uz sfērisko. Bez tam, kodola pamatstāvokļa un augstāko ierosinājumu deformācijas var būt atšķirīgas, t.i., pastāv formu līdzspastāvēšanas iespējamība. Tāpēc ir nepieciešams variēt IBM-1 parametrus visā modeļa parametru izmaiņu apgabalā, nevis tikai gar kādu izvēlētu fāzu pārejas kritisko līniju, t.i., jāizmanto pilnā IBM-1 versija multipolā formā, kas dod iespēju aprakstīt vienotā veidā dažādas kodola formas un pētīt pāreju no vienas formas uz citu.

IBM-1 modeļa parametru vērtības tika iegūtas, pielāgojot teorētisko spektru zemo ierosinājumu kolektīvo stāvokļu eksperimentālajām enerģijām katram no

apskatītajiem kodoliem. Atšķirībā no vairākuma labi zināmo izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas pētījumiem, mēs savā analizē esam ietvēruši katra kodola pilno zemo enerģiju ierosinājuma spektru. Parasti vērā tiek ņemti tikai daži zemākie līmeņi (skat, piemēram, [33]).

Iegūtie rezultāti tika analizēti gan atkarībā no  $SU(3)-O(6)-\overline{SU(3)}$  pirmās kārtas fāzu pārejas kontroles parametra  $\chi$  gan izmantojot katastrofu teorijas būtiskos kontroles parametrus  $(r_1, r_2)$ , kas tika ieviesti darbā [8]. Statistiskā un dinamiskā kvantu haosa kritēriju vērtību, kas tika aprēķinātas katram kodolam algebriskās pilnās IBM-1 versijas ietvaros, uzvedība tika pētīta gan atkarībā no fāzu pāreju kontroles parametriem, gan atkarībā no kodola spina  $I$ . Tika novērtēta iespēja salīdzināt rezultātus, kas iegūti izmantojot algebrisko IBM modeli, ar aprēķinātajiem ģeometriskā cietā trīsasu rotatora pieejas ietvaros.

## 2. Kvantu fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumi, izmantojot vienkāršotās IBM-1 versijas

Mēs sākām mūsu kodola formas kvantu fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumus ar visvienkāršāko algebrisko modeli – IBM-1 divu parametru Kastēna versiju. Šo pētījumu rezultāti tika nopublicēti divos rakstos [R1, R2] kā arī prezentēti starptautiskajā konferencē 2005. gadā [A1].

Kastēna versijas ietvaros standarta IBM-1 hamiltoniāns ir uzrakstāms šādā vienkāršotā veidā (skat., piemēram, [2,4]):

$$H(N_b, \eta, \chi) = \eta \cdot \mathbf{n}_d + \frac{\eta - 1}{N_b} \mathbf{Q}(\chi) \cdot \mathbf{Q}(\chi), \quad (11)$$

kas ir atkarīga no pilnā bozonu skaita  $N_b$  un no diviem modeļa parametriem  $\eta$  un  $\chi$ . Vienādojumā (11)  $\mathbf{n}_d$  ir  $d$ -bozonu skaita operators, bet kvadrupolais operators  $\mathbf{Q}(\chi)$  ir definēts atbilstoši izteiksmei (4). Šai vienkāršotajai versijai piemīt visas pilnā IBM-1 hamiltoniāna dinamiskās simetrijas. Vienādojumu (11) var iegūt no IBM-1 hamiltoniāna multipolās formas izteiksmes (3), ja  $\varepsilon' = \omega = \xi = 0$ . Parametru  $\eta$  un  $\chi$  vērtības var mainīties robežās  $0 \leq \eta \leq +1$  un  $-\sqrt{7}/2 \leq \chi \leq +\sqrt{7}/2$  paplašinātā Kastēna trijstūra iekšienē. Šis trijstūris tiek zīmēts, savienojot virsotni  $\chi = 0$ ,  $\eta = +1$ , kas atbilst sfēriskās simetrijas  $U(5)$  IBM-1 robežgadījumam, ar  $\chi = -\sqrt{7}/2$ ,  $\eta = 0$  un  $\chi = +\sqrt{7}/2$ ,  $\eta = 0$  virsotnēm, kas savukārt atbilst deformētai  $SU(3)$  simetriskai izstieptai formai un deformētai  $\overline{SU(3)}$  simetriskai saspiestai formai. Punkts  $\chi = \eta = 0$  atbilst  $\mathcal{N}$ -mīkstās (nestabilās) formas  $O(6)$  dinamiskajai simetrijai.

Hamiltoniāna (11) klasiskās enerģijas  $E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta)$  funkcionālis tika iegūts darbā [5]. Otrās kārtas  $E_{cl}$  atvasinājuma nosacījums (skat., piemēram, [34]):

$$\left. \frac{d^2 E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta)}{d\beta^2} \right|_{\beta=0} = 0, \quad (12)$$

dod vienādojumu kritiskajiem punktiem, kas atdala sfērisko formu  $\beta = 0$  no deformētās  $\beta \neq 0$ :

$$2(N_b \eta - A_0(4N_b^2 + \chi^2 - 8)) = 0. \quad (13)$$

Vienādojuma (13) atrisinājums attiecībā pret parametru  $\eta$ :

$$\eta = (4N_b + \chi^2 - 8)/(5N_b + \chi^2 - 8), \quad (14)$$

definē otrās kārtas fāzu pārejas līniju  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$ .

Atrisinot vienādojumu sistēmu sastāvošu no izteiksmes (14) un nosacījuma

$$\chi = \pm(\sqrt{7}/2)(\eta - 1) \quad (15)$$

iegūstam vērtības  $\chi_{X(5)}, \eta_{X(5)}$ , kas apraksta kritiskā punkta atrašanos uz līnijas  $U(5) - SU(3)$ . Šo punktu raksturo  $X(5)$  dinamiskā simetrija (analoģiski iegūstam arī  $\overline{X(5)}$  punktu). Izteiksmes (14) atrisinājums pie  $\chi = 0$  dod izolētā trīskāršā punkta  $\eta_{E(5)} = (4N_b - 8)/(5N_b - 8)$  atrašanas vietu, kur otrās kārtas fāzu pārejas kritiskā līnija krusto pirmās kārtas fāzu pārejas līniju, kas atdala izstiepto  $\beta > 0$  un saspiesto  $\beta < 0$  deformētās formas. Šo kritisko punktu raksturo  $E(5)$  simetrija [36]. Tātad pirmās kārtas fāzu pārejas no izstieptās uz saspiesto formu līniju var apzīmēt kā  $E(5) - O(6)$ .

Parasti kodola formas fāzu pāreju pētījumos izmanto Landau piedāvāto pieeju, kā tas tika izdarīts, piemēram, darbos [7, 20]. Tiek paņemts izvairījums

$(1 + \beta^2)^{-2} = 1 - 2\beta^2 + 3\beta^4 - 4\beta^6 + \dots$  un  $E_{cl}$  izteiksme tiek pārrakstīta formā:

$$E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta) = E_0(\eta) + A_L(N_b, \eta, \chi)\beta^2 + B_L(N_b, \eta, \chi)\beta^3 + C_L(N_b, \eta, \chi)\beta^4 + \dots \quad (16)$$

Tomēr enerģijas minimuma atrašanai ir iespējams iegūt precīzo analītisko atrisinājumu, kurš izriet no ekstrēma nosacījuma:

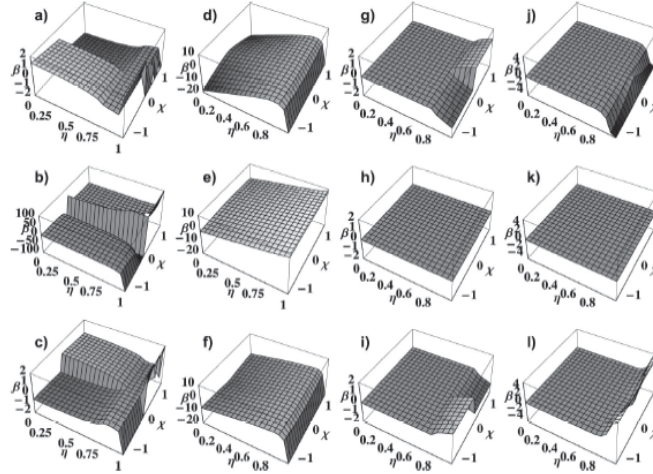
$$\frac{\partial E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (17)$$

kas noved līdz kubiskajam vienādojumam priekš kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  (skat. [R1], [R2]). Šī kubiskā vienādojuma atrisinājumi dod deformācijas parametra  $\beta$  vērtības pie klasiskās enerģijas funkcionāļa minimuma kā trīs saknes  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), kuru izteiksmes ir sarežģītas un vispārīgā gadījumā kompleksas funkcijas, kas atkarīgas no bozonu skaita  $N_b$  un modeļa parametriem  $\eta$  un  $\chi$ .

Mēs esam veikuši detalizētu kubiskā vienādojuma sakņu  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) uzvedības analīzi (skat. [R1], [R2]) parametru  $(\eta, \chi)$  telpā, kas pilnībā nosedz paplašināto Kastēna trijstūri. Īpaša uzmanība tika pievērsta fāzu pāreju līniju un kritisko punktu apkārtnē. Līdzīga analīze tika veikta atbilstošām klasiskās enerģijas minimuma vērtībām  $E_0^i = E_0^i(N_b, \eta, \chi; \beta_{0i})$ .

Attēlā (1) var skaidri saskatīt pirmās kārtas fāzu pārejas līniju  $O(6) - E(5)$ , kas atdala paplašinātā Kastēna trijstūra kreiso un labo pusi (ar  $\beta_0 > 0$  un  $\beta_0 < 0$ ), kā arī trīskāršo punktu  $E(5)$ . Saknes  $\beta_{01,03}$  ir reālas zem  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$  loka līnijas, kamēr sakne  $\beta_{02}$  ir reāla visā apgabalā, ko ierobežo Kastēna trijstūris. Apakšējā Kastēna trijstūra „deformētās formas” daļā, zem  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$  loka līnijas (kad  $0 \leq \eta \leq \eta(E(5))$ ) mums ir trīs nevienādas reālas saknes. Taču viena no šīm saknēm

$(\beta_{02})$  pieņem nefizikāli lielas vērtības. Augšējā, Kastēna trijstūra „sfēriskās formas” daļā, virs  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$  loka līnijas (kad  $\eta(E(5)) < \eta \leq 1$ ) mums ir viena reāla sakne  $(\beta_{02})$ , kas pieņem nefizikāli lielas vērtības un divas kompleksi saistītas saknes  $(\beta_{01}, \beta_{03})$ , kā to arī varēja paredzēt kodola sfēriskās formas apgabalā.



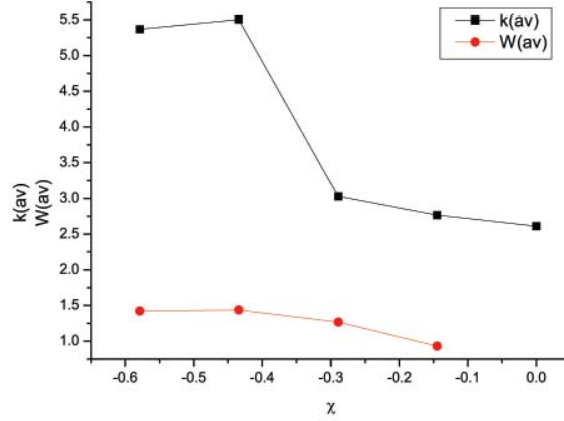
1. attēls: Reālās (a-c) (un imaginārās (g-i))  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) daļas, un atbilstošās minimālās enerģijas  $E_{0i}(N_b, \eta, \chi; \beta_{0i})$  (d-f un j-l). Skaitliskie aprēķini veikti pie  $N_b = 8$ .

Rezultāti, kas tika iegūti pielietojot mūsu metodi klasiskās enerģijas funkcionāļa minimuma uzdevuma atrisināšanai, dod precīzas deformācijas parametra  $\beta$  vērtības katrā Kastēna trijstūra punktā  $(\eta, \chi)$ . Kopumā mūsu analīzes kvalitatīvie secinājumi attiecībā uz fāzu pāreju kritiskajām līnijām un punktiem vienkāršotajā IBM-1 Kastēna versijā ir līdzīgi tiem secinājumiem, kas tika iegūti izmantojot Landau teorijas pieeju [5, 20]. Tomēr klasiskās enerģijas minimuma uzdevuma analītiskais atrisinājums ļauj iegūt precīzākas  $\beta_0$  un  $E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta_0)$  skaitliskās vērtības.

Apskatīsim mūsu kvantu haosa statistisko un dinamisko kritēriju novērtēšanas rezultātus, kas tika izrēķināti izvēlētos punktos Kastēna trijstūra  $(\eta, \chi)$  parametru telpā pie  $N_b = 8$ . Katram punktam piešķirtais numurs ir dots Tabulas (1) pirmajā kolonna. Gadījumā kad  $N_b = 8$ , trīskāršajam punktam ir koordinātas  $\eta_{E(5)} = 0.75$  un  $\chi = 0$ . Modeļa parametru vērtības tika izvēlētas apgabalā zem  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$  otrās kārtas fāzu pārejas līnijas (14), kas atdala sfērisko kodola formu no deformētās, līdz  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  līnijai (pie  $\eta = 0$ ), kas atbilst maksimālai deformācijai. Aprēķini tika veikti tikai paplašinātā Kastēna trijstūra izstieptās deformācijas daļā ( $\chi < 0$ ), jo IBM-1 hamiltoniāna atrisinājums ir spoguļsimetrisks attiecībā pret  $\chi$  parametra vērtībām.

Statistiskā kvantu haosa kritērija aprēķinu rezultāti rāda, ka vienkāršotā IBM-1 Kastēna versija pie  $N_b = 8$  ir diezgan nesajaukta. Starplīmeņu attāluma sadalījuma  $P(S)$  novirze no Puassona formas ir niecīga pat pie maksimālās jaukšanās tālu no Kastēna trijstūra virsotnēm (skat. Tabulu (1)). Apgabals, kurā var sistemātiski novērtēt abus dinamiskos haosa kritērijus:  $\kappa(\Phi_k)$  un  $W(\Psi_i)$ , atrodas aptuveni uz augšu no

paplašinātā Kastēna trijstūra apakšējās  $SU(3)-O(6)-\overline{SU(3)}$  malas līdz tā vidusdaļai ( $0 < \eta \leq 0.75\eta_{E(5)}$ ), bet paliekot zem otrās kārtas fāzu pārejas līnijas  $X(5)-E(5)-\overline{X(5)}$ . Dinamisko kvantu haosa kritēriju uzvedība gar šo fāzu pārejas līniju ir parādīta attēlā (2).



2. attēls: Vidējoto dinamisko kvantu haosa kritēriju  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  un  $W(\Psi_i)_{av}$  uzvedība gar  $X(5)-E(5)-\overline{X(5)}$  fāzu pāreju līniju pie  $N_b = 8$ .

Tabula 1: Kvantu haosa kritēriju aprēķini izvēlētajos Kastēna trijstūra punktos pie  $N_b = 8$ .

Point	$\chi$	$\eta$	$\zeta^a$	$\kappa_{av}(\Phi_k)^b$	$W_{av}(\Psi_i)^b$	$W_{av}/W_{max}^c$		
1	$\chi_{max}^d$	-0.5788	$0.75 \cdot \eta_{E(5)}^d$	0.5625	0.157	5.367	1.423	0.618
2	$0.75 \cdot \chi_{max}$	-0.4341	"	"	-	5.501	1.436	0.624
3	$0.5 \cdot \chi_{max}$	-0.2894	"	"	0.182	3.028	1.266	0.550
4	$0.25 \cdot \chi_{max}$	-0.1447	"	"	-	2.765	0.932	0.405
5	$\chi = 0$	0	"	"	0.170	2.610	-	-
6	$\chi_{max}$	-0.8268	$0.5 \cdot \eta_{E(5)}$	0.3750	0.127	6.516	1.550	0.673
7	$0.75 \cdot \chi_{max}$	-0.6201	"	"	-	6.137	1.557	0.676
8	$0.5 \cdot \chi_{max}$	-0.4134	"	"	0.094	7.639	1.562	0.678
9	$0.25 \cdot \chi_{max}$	-0.2067	"	"	-	4.525	1.276	0.554
10	$\chi = 0$	0	"	"	0.092	2.750	-	-
11	$\chi_{max}$	-1.0748	$0.25 \cdot \eta_{E(5)}$	0.1875	0.105	7.898	1.786	0.776
12	$0.75 \cdot \chi_{max}$	-0.8061	"	"	-	6.343	1.712	0.744
13	$0.5 \cdot \chi_{max}$	-0.5374	"	"	0.124	7.206	1.482	0.644
14	$0.25 \cdot \chi_{max}$	-0.2687	"	"	-	7.289	1.518	0.644
15	$\chi = 0$	0	"	"	0.093	1.396	-	-
16	$\chi(SU(3)) = -\sqrt{7}/2$	-1.3229	$\eta = 0$	0	0.061	7.903	1.878	0.816
17	$0.75 \cdot \chi(SU(3))$	-0.9922	"	"	-	8.806	1.759	0.764
18	$0.5 \cdot \chi(SU(3))$	-0.6614	"	"	0.115	7.193	1.756	0.763
19	$0.25 \cdot \chi(SU(3))$	-0.3307	"	"	-	7.649	1.654	0.718
20	$\chi(O(6)) = 0$	0	"	"	0.012	3.060	-	-

a – Brodī koeficienta vērtība tika piemērota visu  $n_{lev} = 105$  teorētisko stāvokļu ar  $L$  no 0 līdz  $L_{max} = 16$   $P(S)$  sadalījumam;

b – vidējotās dinamisko kvantu haosa kritēriju vērtības  $L = 0$  stāvokļiem ( $n = 10$ );

c –  $W_{max}(\Psi_i) = \ln(10) = 2.302585$ ;

d –  $\chi_{max}$  vērtība ir aprēķināta uz  $U(5)-SU(3)$  līnijas kā  $\chi = -(\sqrt{7}/2)(\eta - 1)$ ;  $\eta_{E(5)}$  – saskaņā ar izteiksmi  $\eta_{E(5)} = (4N_b - 8)/(5N_b - 8)$ .

No tabulā (1) atspoguļotajiem rezultātiem var redzēt, ka uz  $U(5)-SU(3)$  līnijas un apgabalā pie tās (kad  $\chi = 0.75 \cdot \chi_{\max}$ )  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  un  $W(\Psi_i)_{av}$  vērtību uzvedība ir korelēta: tās palielinās no vidusdaļas (kad  $0.75 \cdot \eta_{E(5)} = 0.5625$ ) līdz apakšējai līnijai ( $\eta = 0$ ). Korelācija starp  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  un  $W(\Psi_i)_{av}$  vērtībām attiecībā uz parametru  $\chi$ , kad tas mainās no  $X(5)-SU(3)$  līnijas virzienā uz pirmās kārtas fāzu pārejas līniju  $E(5)-O(6)$ , pazūd kad sajaukšanās pieaug.

Mēs turpinājām savus pētījumus izskatot sarežģītākas daļējās IBM-1 versijas, kuras var iegūt pievienojot  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānam trīsbozonu mijiedarbības locekļus. Šāda modifikācija ļauj aprakstīt IBM-1 ietvaros stabilas triaksiālās kodola formas. Tika pētītas arī fāzu pārejas gadījumos, kad  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānam pievieno kubisko kvadrupolā momenta operatoru, kas ļauj aprakstīt  $\gamma$ -mīkstajai serdei pievienotos cietā rotatora  $SU(3)$  stāvokļus. Mūsu pētījumu rezultāti ir nopublicēti rakstā [R3] un ir ziņoti starptautiskajā [A3] un vietējā [A2] zinātniskajās konferencēs 2006. gadā.

Kā tas bija parādīts darbā [15], lai iegūtu kodola stabilu triaksiālo formu IBM-1 hamiltoniānam jāpievieno trīsbozonu mijiedarbības locekļi. Šī ideja bija attīstīta tālāk darbos [26, 27], kur IBM-1  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānam tika pievienots kubiskās  $d$ -bozonu mijiedarbības operators  $H_{3d}$ , kas satur locekļus ar  $L' = 0, 2, 3, 4, 6$ , kā arī tika iegūta atbilstošā klasiskās enerģijas  $E_{3d}(O(6))$  izteiksme.

Lai pētītu problēmas, kas saistītas ar stabilas triaksiālās formas aprakstu, kad tiek pievienoti trīsbozonu mijiedarbības locekļi ar dažādām  $L'$  vērtībām, mēs veicām klasiskās enerģijas izteiksmes minimumu analīzi attiecībā pret kvadrupolās deformācijas parametriem  $\beta$  un  $\gamma$ , pielietojot nosacījumus

$$\frac{\partial E_{3d}(O(6))}{\partial \beta} = \frac{\partial E_{3d}(O(6))}{\partial \gamma} = 0. \quad (18)$$

Iegūtie rezultāti [R3] ļauj secināt, ka:

1) kubiskais  $d$ -bozonu mijiedarbības locekļis ar  $L' = 0$  nedod ieguldījumu klasiskās enerģijas minimuma vērtībā  $E_{\min} = E_{3d}(O(6), \beta_0, \gamma_0 = 30^\circ)$ : pilnās klasiskās enerģijas minimums šajā gadījumā sakrīt ar to, kas ir IBM-1  $O(6)$  robežgadījumā;

2) ja pievieno  $L' = 2$  locekli, tad kubiskās  $d$ -bozonu mijiedarbības ieguldījums klasiskajā enerģijā nav atkarīgs no asimetrijas parametra  $\gamma$ . Tātad šis locekļis nevar nodrošināt stabilu triaksiālo formu;

3) atlikušie trīs atsevišķie kubiskās  $d$ -bozonu mijiedarbības locekļi ar  $L' = 3, 4, 6$  dod enerģijas minimuma vērtības pie  $\beta_0 \neq 0$  un  $\gamma_0 = 30^\circ$ . Tas pats notiek, ja iekļauj visu locekļu summu ar  $L' = 0, 2, 3, 4, 6$ .

Līdzsvara deformācijas parametra  $\beta_0$  vērtību analīze atkarībā no pilnā bozonu skaita  $N_b$  tika veikta kā gadījumos, kad tiek pievienoti atsevišķi  $L' = 0, 2, 3, 4, 6$  locekļi, tā arī gadījumā, kad tiek pievienota visu trīsbozonu mijiedarbības locekļu summa. Tika konstatēts, ka:

1)  $L' = 0$  locekļa gadījumā  $\beta_0$  vērtības palielinās līdz ar  $N_b$  vērtību: pie  $N_b \rightarrow \infty$  pilnās klasiskās enerģijas minimums tiek iegūts pie  $\beta_0 = 1$ , t.i. iegūstam tādu pašu rezultātu kā tīrajā  $\gamma$ -neatkarīgajā IBM-1  $O(6)$  robežgadījumā (skat. 108.lpp darbā [15]);

2)  $L' = 3$  locekļa gadījumā vērtība  $N_b = 8$ , kas tika izmantota darbā [27], izrādās ir maksimālais bozonu skaits, kuram pie izmantotajām parametru vērtībām ir iespējams enerģijas minimums, kas apmierina nosacījumus (18). Enerģijas minimums nepastāv, ja bozonu skaits  $N_b > 8$ .

3)  $L' = 4,6$  locekļu un arī visu locekļu summas gadījumā  $\beta_0$  vērtības pieaug līdz  $\beta_0^{\max}$  vērtībai (attiecīgi pie  $N_b^{\max} = 18, 12, 11$ ), tad  $\beta_0$  samazinās, t.i.  $\beta_0 \rightarrow 0$ ,  $N_b \rightarrow \infty$  pie  $N_b > N_b^{\max}$ .

Svarīgs secinājums, kas seko no mūsu klasiskās enerģijas minimumu pētījumiem izmantojot  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānu ar pievienoto kubisko  $d$ -bozonu mijiedarbību, ir tāds, ka, lai pētītu kodola triaksiālās formas, ir nepieciešams ņemt vērā ne tikai kubiskās  $d$ -bozonu mijiedarbības operatora  $L' = 3$  locekli, kura nozīme tika uzsvēta literatūrā līdz šim (skat. [27, 16]), bet arī  $L' = 4,6$  locekļus, t.i. ir jāņem vērā visa kubisko  $d$ -bozonu mijiedarbības locekļu summa, kā tas tika ievērots arī darbā [37]. Vēl viens būtisks secinājums ir tas, ka triaksiālā līdzsvara forma, kas tiek iegūta pievienojot apskatīto kubisko  $d$ -bozonu mijiedarbību, ir bozonu galīgā skaita efekts.

Cits veids kā ievērot trīsdaļīgu mijiedarbību IBM-1 ietvaros tika piedāvāts darbā [28]. Autori apskatījuši  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānu ar pievienoto kubisko  $O(6)$  kvadrupolo operatoru mijiedarbības locekli  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$ . Šāds modelis ļauj aprakstīt  $SU(3)$  tipa cietā rotatora stāvokļus, kas balstās uz  $O(6)$  simetrisko  $\gamma$ -mīksto serdi. Tādējādi var pētīt, piemēram, triaksiālo kodolu ar eksperimentāli novēroto  $\beta$ -vibrācijas joslu. Darbā [28] tika piedāvāti divi vienkārši IBM-1 hamiltoniāni: 1)  $H_1$ , kas saglabā oriģinālā  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniāna  $O(6)$  simetriju, un 2)  $H_2$ , kas iekļauj  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$  locekli formā, kas  $O(6)$  simetriju nesaglabā.

Ja  $N_b \rightarrow \infty$ , abu modeļu hamiltoniānu  $H_i (i=1,2)$  klasiskās enerģijas funkcionāļus  $E_{ir}$  (skat. [28]) var uzrakstīt kā [R3]:

$$E_{ir}(\alpha\delta_{i,1} + \alpha'\delta_{i,2}, \vartheta; \beta, \gamma) = c_{i,1} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} + c_{i,2} \frac{(1 - \beta^2)^2 \delta_{i,1} + \beta^2 \delta_{i,2}}{(1 + \beta^2)^2} - 4\vartheta \sqrt{\frac{8}{35}} \frac{\beta^3 \cos(3\gamma)}{(1 + \beta^2)^3}, \quad (19)$$

kur  $c_{i,1} = 4$  un  $c_{i,2} = \alpha/4$   $i=1$  modeļa gadījumā, un  $c_{i,1} = 1$  un  $c_{i,2} = 4\alpha'$   $i=2$  gadījumā. Modeļa parametri  $\alpha$  un  $\alpha'$  izsakās caur IBM-1  $O(6)$  robežgadījuma parametriem;  $\mathcal{G}$  ir kubiskās  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$  mijiedarbības spēka parametrs. Tā kā klasiskās enerģijas izteiksme (19) satur tikai  $\sim \cos(3\gamma)$  atkarību, tad tas nozīmē, ka  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$  locekļa pievienošana ļauj iegūt  $E_{ir}$  minimumu tikai pie  $\gamma_0 = 0^\circ$  vai  $60^\circ$  asimetrijas leņķiem: vai nu izstiepto ( $\beta_0 > 0$ ,  $\mathcal{G} > 0$ ), vai saspiesto ( $\beta_0 < 0$ ,  $\mathcal{G} < 0$ ). Šie atrisinājumi ir pilnībā simetriski attiecībā uz  $\mathcal{G}$  zīmi.

Minimuma nosacījuma pielietošana dod ceturtās pakāpes vienādojumus attiecība pret kvadrupolās deformācijas parametru  $\beta$ . Šie vienādojumi tika analizēti, īpašu uzmanību pievēršot apgabalim, kuros ir tikai kompleksās saknes, kas atbilst sfēriskajam kodolam.

Nosacījumus priekš izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas, kas ir saistīti ar parametra  $\vartheta$  zīmes maiņu, var analizēt, aplūkojot sakarības  $\beta_{0l}(\alpha, \vartheta) = -\beta_{0m}(\alpha, -\vartheta)$  abu modeļu gadījumā. Trīskāršā punkta, kur notiek sfēriskās un izstieptās-saspiestās kodola formas līdzāspastāvēšana, atrašanās vietu nosaka pēc (skat., piemēram, [34]):

$$\left. \frac{d^2 E_{ir}(\alpha \delta_{i,1} + \alpha' \delta_{i,2}, \vartheta; \beta, \gamma = 0)}{d\beta^2} \right|_{\beta=0} = 0. \quad (20)$$

Iegūtā vienādojuma atrisinājums dod trīskāršā punkta koordinātas pie  $(\alpha = 4, \vartheta = 0)$   $H_1(i=1)$  modeļa gadījumā un pie  $(\alpha' = -1/4, \vartheta = 0)$   $H_2(i=2)$  modeļa gadījumā.

Salīdzinot mūsu precīzā analītiskā atrisinājuma rezultātus  $O(6)$  simetriskajā modeli ar kubisko  $[\text{QQQ}]^{(0)}$  mijiedarbību, ar tiem kas tika iegūti darba [28], tika konstatētas dažas atšķirības. Tā, ja izmanto mūsu metodi, tad sfēriskās formas apgabals veido noslēgtu elipsoīda tipa figūru. Turpretī darbā [28] sfēriskās formas apgabals noslēgtu figūru neveido. Fāzu pārejas  $O(6)$  simetriju nesaglabājošā modelī ar  $[\text{QQQ}]^{(0)}$  mijiedarbību darbā [28] netika apskatītas.

### 3. Kvantu haosa pētījumi ģeometrisko cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumā

Savu hamiltoniānu struktūras dēļ ģeometriskie kodola modeļi reti tiek izmantoti KFP pētījumiem pie zemām enerģijas un spina vērtībām. Tikmēr kvantu haosa parādības, kas saistītas ar dažādu ģeometrisko modeļu spektroskopiskajām īpašībām, it īpaši pie augstām kodola serdes pilnā leņķiskā momenta vērtībām, pēdējās desmitgades laikā ir piesaistījušas plašu uzmanību. Ievērojama metodoloģiska interese priekš kvantu haosa pētījumiem piemīt kodola trīsasu rotatora modelim, jo tā klasiskais analogs ir labi zināma integrējama sistēma.

Savos kvantu haosa kritēriju pētījumos mēs esam apskatījuši divas kodola cietā trīsasu rotatora modeļa versijas: Davidova un Bravina-Fedorova modeli. Galvenā uzmanība tika pievērsta dinamisko kvantu haosa kritēriju – viļņu funkciju entropijas  $W(\Psi_i)$  un bāzes stāvokļu fragmentācijas platuma  $\kappa(\Phi_k)$  aprēķināšanai un salīdzināšanai. Iegūtie rezultāti tika iekļauti žurnāla raksta manuskriptā [R4] un publicēti starptautiskās konferences materiālu krājumā [R5]. Žurnāla manuskripts pašlaik tiek rediģēts un papildināts, iekļaujot tajā arī datus par kvantu haosa statistiskā kritērija aprēķiniem. Mūsu pētījumu rezultāti arīdzan tika ziņoti starptautiskajās [A5, A8] un vietējās [A4, A6] zinātniskajās konferencēs 2007. un 2008.gadā.

Davidova cietā trīsasu rotatora modelis (skat., piemēram, [29, 10]) ir vienkāršākais kolektīvais modelis, kas ļauj aprakstīt ierosinātos līmeņus pāra-pāra kodoliem, kuriem ir stabila triaksiālā deformācija ar asimetrijas leņķi  $\gamma = \gamma_{eff} \neq 0$ . Cietās kvadrupolās deformācijas gadījumā ( $\beta = \beta_{eff}$ ,  $\gamma = \gamma_{eff}$ ) kodola serdes kolektīvo hamiltoniānu var pierakstīt kā

$$H_D = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{I}_j^2}{\sin^2(\gamma - j \frac{2\pi}{3})}, \quad (21)$$

kur  $\mathbf{I}_j$  ir kodola pilnā leņķiskā momenta operatora  $\mathbf{I} \equiv \mathbf{L}$  projekcijas uz Dekarta asīm, kas sakrīt ar kodola inerces momenta galvenajiem virzieniem. hamiltoniāna (21) matricas elementi tiek uzdoti bāzē, kuru veido aksiāli simetriskā rotatora īpašfunkcijas.



Pilnveidotāku modeļa versiju attīstīja Bravins un Fedorovs (skat. [30]). Viņu cietā trīsasu rotatora modeļa hamiltoniāna izteiksme ir atkarīga no abiem kodola kvadrupolās deformācijas parametriem  $\beta$  un  $\gamma$ .

Abu trīsasu rotatora modeļu hamiltoniāna matricas tika diagonalizētas pie visām pāra un nepāra spina vērtībām diapazonā  $I = 2, 3, \dots, 100, 101$ , t.i. līdz maksimālajiem matricu rangiem  $n(I_{\text{even}} = 100) = 51$  un  $n(I_{\text{odd}} = 101) = 50$ , kas dod 2600 teorētisko stāvokļu  $E_1(I), E_2(I), \dots, E_{n_0}(I)$  enerģijas. Diagonalizācijas procedūra tika veikta pie  $N_\gamma = 28$  asimetrijas leņķa vērtībām  $\gamma = 3^\circ, 4^\circ, \dots, 30^\circ$ . Bravina-Fedorova modeļa gadījumā aprēķini tika veikti pie trim fiksētām  $\beta$  vērtībām: 0.1, 0.2 un 0.3. Iegūtie īpašvērtību un viļņu funkciju komplekti tika izmantoti statistiskā un dinamisko kvantu haosa kritēriju  $P(S)$ ,  $W(\Psi_i)$  un  $\kappa(\Phi_k)$  pētījumiem.

Statistiskais haosa kritērijs – starplīmeņu attālumu sadalījums  $P(S)$  tika aprēķināts pie maksimālās izmantotās spina vērtības  $I = 100$ , kad diagonalizētās matricas rangs ir  $n_0 = 51$ . Lai gan sakārtotā teorētiskā spektra īpašvērtību skaits pie šīs spina vērtības ir mazs, ja salīdzina to ar īpašvērtību skaitu pie  $I \geq 1000$  vērtībām darbā [38], var redzēt, ka mūsu rezultāti ļauj izdarīt līdzīgu secinājumu: starplīmeņu attālumu sadalījums cietā trīsasu rotatora gadījumā nepakļaujas Puassona statistikai, kā to varētu sagaidīt klasiski integrējamā hamiltoniāna gadījumā.

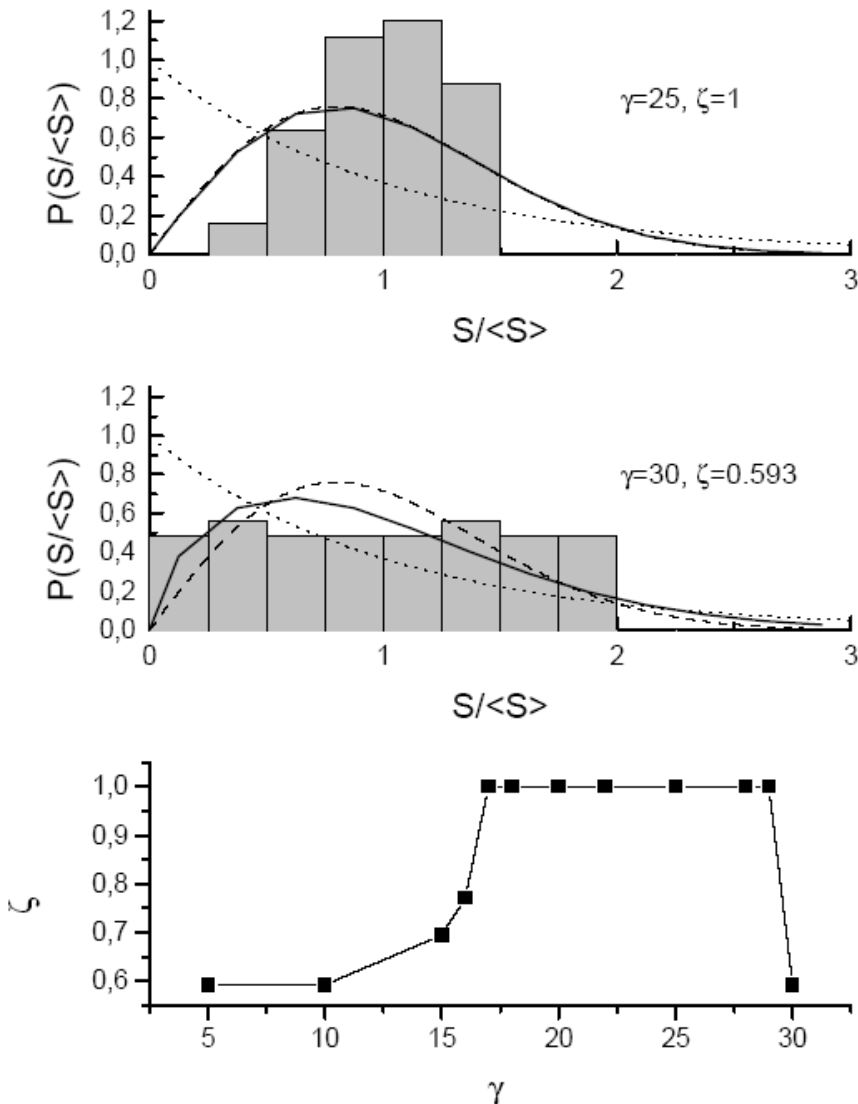
Tabula 2: Viļņu funkciju entropijas vidējoto vērtību  $W(\Psi_i)_{av}(I)$  salīdzinājums ar teorētiski iespējamām maksimālajām vērtībām  $W(\Psi_i)_{max}$  cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumā.

$I_{\text{even}}$	$I_{\text{odd}}$	$n_0$	$W(\Psi_i)_{av}$		$W(\Psi_i)_{max}$	$W(\Psi_i)_{av}/W(\Psi_i)_{max}$	
			$I_{\text{even}}$	$I_{\text{odd}}$		$I_{\text{even}}$	$I_{\text{odd}}$
4	7	3	0.936	0.936	1.099	0.849	0.852
6	9	4	1.047	1.095	1.386	0.755	0.790
8	11	5	1.213	1.254	1.609	0.754	0.779
10	13	6	1.398	1.462	1.792	0.780	0.816
12	15	7	1.508	1.561	1.946	0.775	0.802
14	17	8	1.602	1.659	2.079	0.771	0.798
16	19	9	1.746	1.794	2.197	0.795	0.817
18	21	10	1.811	1.854	2.303	0.786	0.805
20	23	11	1.885	1.926	2.398	0.786	0.803
22	25	12	1.979	2.022	2.485	0.796	0.814
24	27	13	2.033	2.078	2.565	0.793	0.810
26	29	14	2.090	2.143	2.639	0.792	0.812
28	31	15	2.177	2.225	2.708	0.804	0.822

Attēlā (3) var redzēt  $P(S)$  aprēķinu rezultātus pie dažādām asimetrijas leņķa  $\gamma$  vērtībām. Iegūtie sadalījumi tika aproksimēti izmantojot Brodī formulu (7). Attēla (3) apakšējā daļā ir parādīta iegūto Brodī koeficienta  $\zeta$  vērtību atkarība no  $\gamma$ . Var redzēt, ka sistēmas haotiskums pieaug līdz ar kodola asimetriju. Pie  $18^\circ \leq \gamma \leq 29^\circ$  cietā trīsasu rotatora īpašvērtības pakļaujas Vīgnera statistikai, kas raksturīga Gausa ortogonālajiem ansambļiem (GOE). Ievērojami, ka pie  $\gamma = 30^\circ$  sistēmas haotiskums atkal samazinās. Tomēr, lai secinājumi kļūtu pārliecinošāki, ir jāveic  $P(S)$  sadalījumu pētījumi pie augstākām spina vērtībām.

Entropijas vērtības  $W(\Psi_i)_{av}(I)$ , kas viduvējas pa visām viļņu funkciju komponentēm pie noteikta asimetrijas leņķa  $\gamma$ , parāda stabilu  $W(\Psi_i)_{av}(I)$  pieauguma tendenci, kad  $\gamma$  palielinās līdz  $\gamma = 30^\circ$ . Maksimālā viļņu funkciju entropijas vērtība tiek sasniegta pie  $\gamma = 30^\circ$ . Šī tendence tiek novērota gan pāra, gan nepāra spina  $I$  vērtībām un to neietekmē dažas vērtību fluktuācijas, kas tiek novērotas atkarībā no  $\gamma$  atsevišķu  $W(\Psi_i)$  komponentu gadījumā.

Tabulā (2) vidējotās entropijas vērtības  $W(\Psi_i)_{av}(I)$ , kas aprēķinātas maksimālās bāzes stāvokļu funkciju  $\Phi_k(I, M, K)$  sajaukšanās gadījumā pie  $\gamma = 30^\circ$ , tiek salīdzinātas ar teorētiski iespējamajām maksimālajām entropijas vērtībām  $W(\Psi_i)_{max}(I) = \ln(n_0(I))$ , kad sajauktās perturbētās viļņu funkcijas ir vienmērīgi sadalītas pār visiem bāzes stāvokļiem. Salīdzinājums parāda, ka pat maksimālā sajaukšanās gadījumā  $W(\Psi_i)_{av}(I) = (0.75 \div 0.85)W(\Psi_i)_{max}(I)$ . Tas parāda, ka Davidova cietā trīsasu rotatora modeļa iekšējā struktūra nepieļauj augstāku haosa pakāpi attiecībā pret aksiāli simetriskā rotatora īpašfunkciju bāzi.



3. attēls: Starplīmeņu attālumu sadalījums  $P(S)$  atkarībā no asimetrijas leņķa  $\gamma$  cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumā.

Otra dinamiskā kvantu haosa kritērija, bāzes stāvokļu fragmentācijas platuma  $\kappa(\Phi_k)$ , aprēķināšana ir sarežģītāks uzdevums. Nosakot  $\Gamma_{spr}$  vērtības ir jāseko, lai attiecībā uz iesaistīto stāvokļu sajaukšanās amplitūdām izpildās nosacījums (10). Tas nozīmē, ka  $\kappa(\Phi_k)$  vērtības var novērtēt tikai tad, kad bāzes stāvokļu jaukšanās pārsniedz noteiktu robežu, t.i. lielu asimetrijas leņķa vērtību gadījumā. Tabulā (3) var redzēt  $\kappa(\Phi_k)$  kritērija aprēķinu rezultātus pie spina  $I = 24$ . Pie šīs spina vērtības matricas rangs ir  $n_0(I = 24) = 13$  un bāzes stāvokļu fragmentācijas platumu novērtēšanu var sākt pie  $\gamma = 23^\circ$ . Ir skaidri redzama tendence, ka  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  vērtība pieaug līdz ar asimetrijas leņķa  $\gamma$  palielināšanos.

Tabula 3: Cietā trīsasu rotatora modeļa bāzes stāvokļu fragmentācijas platumi  $\kappa(\Phi_k)$ , kas aprēķināti pie spina vērtības  $I = 24$  ( $n_0(I) = 13$ ).

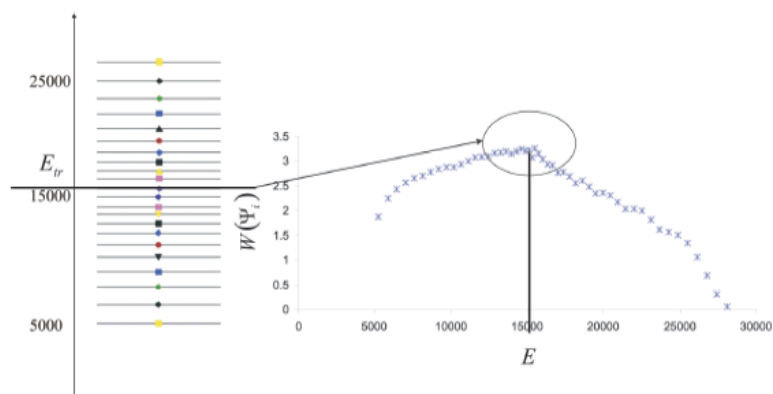
$\gamma$	$D_0(\gamma)$	$\kappa(\Phi_k)^a$									$\kappa(\Phi_k)_{av}$
		$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	
$23^\circ$	111.89	X	X	1.71	X	X	X	X	X	X	1.71
$24^\circ$	98.21	X	X	X	2.15	X	X	X	X	X	2.15
$25^\circ$	85.81	0.55	1.47	1.98	2.41	X	X	X	X	X	1.60
$26^\circ$	74.46	1.39	1.69	3.82	X	3.18	X	X	X	X	2.52
$27^\circ$	63.96	1.45	4.00	5.45	X	2.91	3.13	X	X	X	3.39
$28^\circ$	54.14	1.48	5.98	7.45	3.97	3.50	3.02	3.15	X	X	4.08
$29^\circ$	44.87	0.71	2.81	8.57	9.97	2.27	3.16	3.72	X	4.97	4.52
$30^\circ$	36.00	7.33	3.50	3.50	10.00	6.50	5.33	4.67	5.50	4.50	5.65

<sup>a</sup> – Stāvokļi, kuriem nevar novērtēt  $\kappa(\Phi_k)$  vērtību, jo tiek pārkāpts nosacījums (10), ir apzīmēti ar „X”.

Tika konstatēts, ka cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumā teorētiski paredzēto pāreju no mīkstā haosa uz cieto haosu ir iespējams pētīt tikai sākot ar salīdzinoši augstu spina vērtību ( $I = 50$ ), kad bāzes stāvokļu skaits  $n_0 \geq 26$ . Mēs savos aprēķinos neesam novērojuši gludu, pakāpenisku pāreju no mīkstā haosa ( $\kappa(\Phi_k) < 1$ ) uz cieto haosu ( $\kappa(\Phi_k) > 1$ ). Cietā trīsasu rotatora modelī pāreja uz cietā haosa gadījumu ir pēkšņa, un mēs varam piedāvāt divus skaidrojumus šai situācijai. Pirmais ir saistīts ar nosacījumu (10), kas ievērojami ierobežo to stāvokļu skaitu, kurus var izmantot  $\Gamma_{spr}$  un  $\kappa(\Phi_k)$  novērtēšanai. Otrais izriet no modeļa hamiltoniāna matricas trīsdiagonālās struktūras. Dēļ tās viļņu funkciju sajaukšanās amplitūdas nav vienmērīgi sadalītas pa visām bāzes funkciju komponentēm: to sadalījums aptuveni atbilst Lorenca sadalījumam, kas, savukārt, pastiprina ierobežojuma (10) nozīmi  $\kappa(\Phi_k)$  vērtību aprēķināšanā.

Rezultāti, kas iegūti abu kritēriju:  $W(\Psi_i)$  un  $\kappa(\Phi_k)$ , vērtībām Bravina-Fedorova modeļa gadījumā parāda dinamiskā haosa samazināšanos līdz ar kvadrupolās deformācijas  $\beta$  pieaugumu, kas arī tika sagaidīts, jo mēs apskatām jaukšanos attiecībā pret aksiāli simetriskā rotatora bāzes funkcijām.

Papildus mēs esam veikuši abu cietā trīsasu rotatora modeļu teorētisko enerģiju spektru analīzi ar nolūku meklēt pāreju no rotācijas tipa līmeņu secības uz librācijas tipa secību. Daļēji klasiskā apraksta ietvaros [14] šāda pāreja notiek pie enerģijas vērtības  $E_{tr} = (b/2)I^2$ , t.i. cietā trīsasu rotatora kvantu statistika izturēšanās ir analogiska tai, kas tiek novērota citas anomālās kvantu sistēmas – viendimensijas harmoniskā oscilatora, gadījumā.



4. attēls: Pāreja no rotācijas tipa spektra uz librācijas tipa spektru Davidova cietā trīsasu rotatora modeļī pie  $I = 100$  un  $\gamma = 25^\circ$ .

Raksturīgais enerģijas līmeņu blīvuma  $\rho(E_i)$  maksimums un atbilstošā viļņu funkciju entropija  $W(\Psi_i)$  tika novēroti pie  $E_{tr}$  atkarībā no  $I$  un  $\gamma$  Davidova modeļa gadījumā (skat. attēlu (4)), un atkarībā no  $I$ ,  $\beta$  un  $\gamma$  Bravina-Fedorova modeļa gadījumā. Tas saskan ar darbā [14] rezultātiem, kas tika iegūti Davidova cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumā.

#### 4. Kvantu fāzu pāreju pētījumi pilnā IBM-1 modeļa gadījumā

Bija loģiski turpināt mūsu kodola formas fāzu pāreju pētījumus, kas tika uzsāktas, izmantojot vienkāršotās IBM-1 versijas, apskatot pilno IBM-1 versiju. Standarta IBM-1 hamiltoniāns, kas ietver viena  $s$ -bozona un piecu  $d$ -bozonu sešas brīvības pakāpes, dod iespēju aprakstīt pāra-pāra kodola serdes kolektīvo ierosinājumu pilno dinamiku izmantojot  $U(6)$  simetrijas grupas  $U(5)$ ,  $SU(3)$  un  $O(6)$  apakšgrupu ķēdes atbilstoši izteiksmei (2). Pilnais IBM-1 hamiltoniāns un tā klasiskās enerģijas robežgadījums ir atkarīgi no sešiem modeļa parametriem, tāpēc, lai analizētu tā uzvedību visā modeļa parametru telpā, ir nepieciešamas īpašas metodes. Darbā [8] tika piedāvāta uz katastrofu teorijas balstītā pieeja. Šī metode ļauj reducēt IBM-1 klasiskās enerģijas funkcionāla analīzi uz tā uzvedības pētījumiem telpā, kas satur tikai divus būtiskus kontroles parametrus.

Mēs esam izmantojuši darbā [8] attīstīto pieeju savam pētījumam par pilnā IBM-1 hamiltoniāna klasiskās enerģijas  $E_{cl}$  virsmām, pielietojot minimumu nosacījumu vienādojumiem precīzo risinājuma metodi, kas tika izstrādāta vienkāršoto IBM-1 versiju gadījumā. Mūsu pētījumu rezultāti ir npublicēti žurnālā [R6] un ziņoti starptautiskajā zinātniskajā konferencē 2008.gadā [A7].

Izmantojot katastrofu teorijas formālismu (detālas skatīt [8]), tiek ieviesti būtiskie kontroles parametri:

$$r_1 = \frac{a_3 - u_0 + w}{2a_1 + w - a_3}; \quad r_2 = -\frac{2a_2}{2a_1 + w - a_3}, \quad (22)$$

kur  $w = \varepsilon/(N_b - 1)$  un  $a_1$ ,  $a_2$  un  $a_3$  ir parametri, kas aizstāj sešas sākotnējās divu bozonu mijiedarbības konstantes. Tad, ja pieņem, ka  $\gamma = 0^\circ$ , tādējādi izslēdzot  $\gamma$

brīvības pakāpi, iegūst sekojošu galīgo pilnās IBM-1 versijas klasiskās enerģijas funkcionāļa izteiksmi:

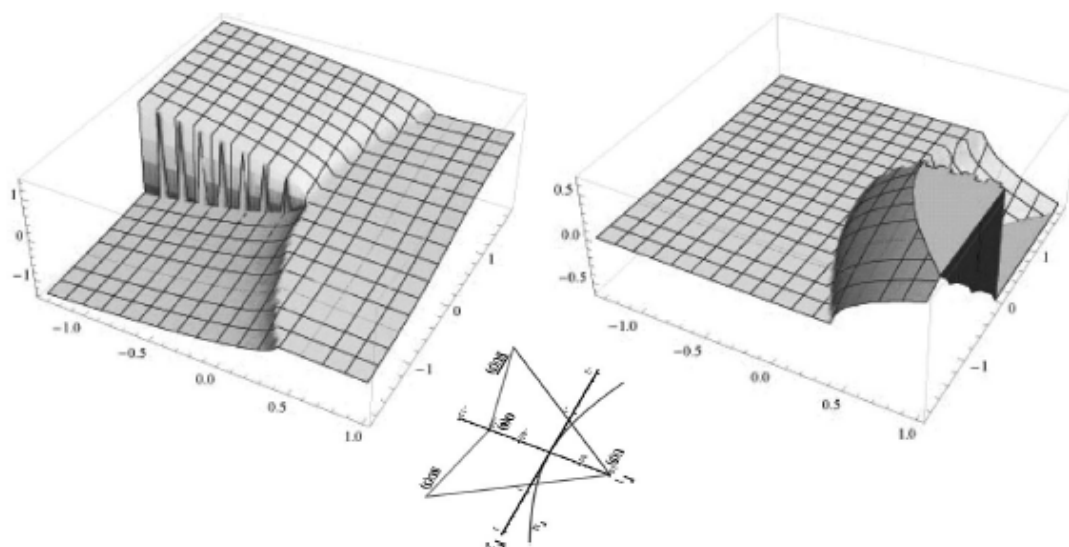
$$E_0(r_1, r_2; \beta) = \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} [\beta^4 + r_1\beta^2(\beta^2 + 2) - r_2\beta^3]. \quad (23)$$

Klasiskās enerģijas funkcionālis  $E_0(r_1, r_2; \beta)$  kontroles parametru  $(r_1, r_2)$  telpā tiek prezentēts ar „bezdelīgas aste” formas diagrammu [8]. Šī diagramma iekļauj visus IBM-1 dinamisko simetriju robežgadījumus ( $U(5), O(6), SU(3), \overline{SU(3)}$ ).

Apskatīsim klasiskās enerģijas minimuma problēmas risinājumu. Atbilstošo vienādojumu ir iespējams iegūt, pielietojot vienādojumam (23) ekstrēma nosacījumus. Ja izslēdz triviālus risinājumus, izvirzot nosacījumus  $(1 + \beta^2)^3 \neq 0$  un  $\beta \neq 0$ , šo ekstrēma nosacījumu var reducēt uz kubisku vienādojumu

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0. \quad (24)$$

Šī kubiskā vienādojuma trīs saknes  $\beta_{0i}$  ( $i=1,2,3$ ) dod deformācijas parametra  $\beta$  vērtības, pie kurām enerģijas funkcionālim (23) ir minimums. Iegūtās šo sakņu precīzās izteiksmes ir ļoti smagnējas un, vispārīgā gadījumā, kompleksas funkcijas no kontroles parametriem  $r_1$  un  $r_2$ . Vienas no šīm saknēm uzvedība parametru vērtību apgabalos  $-2 \leq r_1 \leq 2$  un  $-2 \leq r_2 \leq 2$  ir parādīta attēlā (5) atsevišķi reālajai un imaginārajai daļai.



5. attēls: Vienādojuma (24) pirmās saknes  $\beta_{01}$  reālās (kreisajā pusē) un imaginārās (labajā pusē) daļas uzvedība kontroles parametru apgabala  $-2 \leq r_1 \leq 2$  un  $-2 \leq r_2 \leq 2$ .

Šo sakņu pamatīpašības var analizēt, analogiski kā tas tika darīts vienkāršoto IBM-1 versiju gadījumā, apskatot kubiskā vienādojuma (24) diskriminanta  $D_3$  vērtības. Kad  $D_3 < 0$ , tiek iegūta viena reāla un divas kompleksi saistītas saknes. Ja  $D_3 > 0$ , ir trīs reālas nevienādas saknes, kamēr, ja  $D_3 = 0$  – divas reālas vienādas saknes.

$D_3 = 0$  gadījums, kad mums ir divas reālas deģenerētas saknes, nosaka otrās kārtas fāzu pārejas līnijas starp sfēriskajām un deformētajām kodola formām:

$$\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{pmatrix} = \mp \frac{(9r_2^2 + 16)^{3/2}}{54r_2^2} - \frac{32}{27r_2^2} - 1. \quad (25)$$

Šie atrisinājumi sakrīt ar tiem, kas doti vienādojumos (3.19 a, b) darbā [8], kur līnijas  $r_{11}$  un  $r_{12}$  nosaka, saskaņā ar katastrofu teoriju, bifurkācijas kopu kā kontroles parametru  $(r_1, r_2)$  telpas punktu vietu, kurā notiek pāreja no viena lokālā minimuma uz citu. Mūsu gadījumā  $r_{12}$  risinājums nosaka loka līniju, kas atdala sfēriskās un deformētās formas apgabalus, kamēr  $r_{11}$  risinājumam nav tik skaidras fizikālās interpretācijas.

Trīskāršo punktu, kur satiekas sfēriskā un abas deformētās (izstieptā un saspīestā) formas, var iegūt no kritiskā punkta nosacījuma, ko pielieto izteiksmes (23) otrās kārtas atvasinājumam:

$$\left. \frac{d^2 E_0(r_1, r_2; \beta)}{d\beta^2} \right|_{\beta=0} = 0, \quad (26)$$

kas dod šī punkta koordinātas pie  $r_1 = r_2 = 0$ .

Apakšējā „deformētās formas” daļā zem  $r_{12}$  loka līnijas, ko nosaka vienādojums (25), mums ir  $D_3 > 0$  gadījums ar trim reālām un nevienādām saknēm. Skaitliskās vērtības divām no tām: ( $\beta_{01}$  un  $\beta_{03}$ ) ir spoguļsimetriskas un tām ir pretējās zīmes attiecībā pret  $r_2 = 0$  līniju. Otrā sakne  $\beta_{02}$  pieņem vērtības tuvu nullei tālu no  $r_2 = 0$  līnijas visā  $(r_1, r_2)$  apkaimē abās  $r_{12}$  loka līnijas pusēs un nefizikāli lielas vērtības  $\beta_{02} \rightarrow \pm\infty$  ar pretējām zīmēm gar visu  $r_2 = 0$  līniju, kad  $r_2 \rightarrow \pm 0$ .

Augšējā „sfēriskās formas” diagrammas daļā mums ir  $D_3 < 0$  gadījums ar divām kompleksi saistītām saknēm  $\beta_{01}$ ,  $\beta_{03}$ , kuras ir spoguļsimetriskas attiecībā pret  $r_2 = 0$  līniju. Šīm saknēm ir ļoti mazas reālās daļas un lielas imaginārās daļas ar pretējām zīmēm. Otrās reālās saknes  $\beta_{02}$  uzvedība šajā apgabalā ir līdzīga tai, kas aprakstīta augstāk  $D_3 > 0$  gadījumā.

Lai salīdzinātu mūsu klasiskās enerģijas funkcionāļa minimuma uzdevuma precīzā risinājuma metodes rezultātus ar rezultātiem, kas iegūti, izmantojot Landau teorijas pieeju, mēs izvīzījām vienādojumu (23) Teilora rindā attiecībā pret deformācijas parametru  $\beta$ :

$$E_{0T}(r_1, r_2; \beta) = 2r_1\beta^2 - r_2\beta^3 + (1 - 3r_1)\beta^4 + 2r_2\beta^5 + (4r_1 - 2)\beta^6 + O(\beta^7). \quad (27)$$

Ja šai izteiksmei pielieto ekstrēma nosacījumu, iegūst vienādojumu klasiskās enerģijas minimuma noteikšanai.

Uz Landau fāzu pāreju teorijas balstītās pieejas ietvaros izteiksmes (27) augstākās kārtas locekļi, sākot ar  $\sim \beta^4$  pakāpes locekli, parasti netiek ņemti vērā (skat., piemēram, [20]). Lai novērtētu efektus, kas rodas šī izvīzījuma vienkāršošanas dēļ, mēs esam piemērojuši ekstrēma nosacījumu attiecīgajām Teilora rindām, pēc kārtas iekļaujot visus locekļus līdz pat  $\beta^4$ , līdz  $\beta^5$  un līdz  $\beta^6$ . Tika konstatēts, ka tikai iekļaujot locekļus līdz pat  $\beta^5$  pakāpei var iegūt kubisku vienādojumu (ar nosacījumu

$\beta \neq 0$ ), kurā tikai divi koeficienti, pie  $\beta^3$  un  $\beta^2$ , nedaudz atšķiras no atbilstošajiem koeficientiem vienādojumā (24), kas iegūts ar precīzā risinājuma metodi. Šāda kubiskā vienādojuma triju sakņu analīze ļauj iegūt līdzīgu fāzu pāreju kritisko punktu un līniju ainu kā precīzā risinājuma gadījumā. Turpretī, ja Teilora izvirzījums (27) tiek aprauts pie  $\beta^4$  vai  $\beta^6$  pakāpes locekļiem, tad atbilstošajām  $\beta_{0i}$  saknēm tiek iegūtas nefizikālas vērtības.

## 5. Izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas pētījumi A~190 apgabala kodolu gadījumā

Eksperimentālo datu analīze parāda, ka kodola formas fāzu pāreja W-Os-Pt apgabalā ir ļoti sarežģīta. Faktiski notiek divas paralēlas pārejas:  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  fāzu pāreja no deformētās izstieptās formas uz saspiesto, un  $O(6) - E(5) - U(5)$  pāreja no deformētās formas uz sfērisko, kas notiek pateicoties  $N = 126$  čaulas noslēgšanās tuvumam. Tāpēc ir jāapskata IBM-1 parametru izmaiņas visā modeļa parametru telpā, ne tikai gar kādu izvēlētu fāzu pārejas kritisko līniju. Tādēļ, lai iegūtu reālistisku teorētisku aprakstu konkrēto kodolu gadījumā, mēs esam izmantojuši pilno IBM-1 hamiltoniānu multipolā formā atbilstoši izteiksmei (3).

Modeļa aprēķini katram kodolam tika veikti pie bozonu skaita  $N_b$ , kuru nosaka protonu caurumu pāru summa attiecībā pret noslēgto  $Z = 82$  čaulu un neitronu caurumu pāru summa attiecībā pret noslēgto  $N = 126$  čaulu. Modeļa hamiltoniāna diagonalizācijai, lai iegūtu atbilstošās īpašvērtības un īpašfunkcijas sfēriskajā  $U(5)$  bāzē, tika izmantota programma PHINT [17]. IBM-1 hamiltoniāna parametri:  $\varepsilon', \eta, \chi, \kappa$  un  $\omega$  tika variēti, lai sasniegtu labāko iespējamo saskaņu ar pieejamajiem eksperimentālajiem datiem [32] katra izvēlētā kodola gadījumā. Šajos datos tika iekļauti droši zināmie zemas enerģijas līmeņi ar spina vērtībām  $I \leq 8$  (pamatstāvokļa joslas gadījumā), un ar  $I \leq 6$  (citu kolektīvo ierosinājumu gadījumā). Tādējādi, visa zināmā zemo enerģiju ierosināto līmeņu shēmas kolektīvā daļa tika izmantota kodola formas fāzu pārejas pētījumos. Parasti vērā tiek ņemts tikai pamatstāvoklis vai daži zemākie līmeņi (skat., piem., [33]).

Lai paātrinātu IBM-1 modeļa parametru pielāgošanu, to sākotnējās vērtības tika iegūtas ar mazāko kvadrātu metodi risinot lineāro vienādojumu sistēmas eksperimentālajām un teorētiskajām līmeņu enerģijas vērtībām vai nu  $SU(3)$  aksiāli simetriskā rotatora robežgadījumā, vai arī  $O(6)$   $\gamma$ -nestabilā kodola robežgadījumā. Heksadekapolās deformācijas locekļi vienādojumā (3) netika ņemti vērā, pieņemot, ka  $\xi = 0$ .

Tā kā IBM-1 hamiltoniāns ir simetrisks attiecībā uz izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas kontroles parametra  $\chi$  zīmi, mēs esam veikuši savus enerģijas līmeņu aprēķinus pie  $\chi \leq 0$  vērtībām, piešķirot  $\chi$  zīmi vēlāk, ņemot vērā eksperimentāli novērotas kodolu elektromagnētiskās īpašības un ņemot vērā modeļa parametru uzvedības tendences kaimiņu kodolos.

Iegūtās IBM-1 parametru vērtības visiem apskatītajiem volframa, osmija un platīna izotopiem ir apkopotas tabulā (4). Saskaņu starp eksperimentālajām un aprēķinātajām līmeņu enerģijām raksturo vidējā kvadrātiskā novirze  $d = \sqrt{(E_{\text{exp}} - E_{\text{calc}})^2 / m}$ , kur  $m$  ir iekļauto eksperimentālo līmeņu skaits. Var redzēt, ka saskaņa, kuru var sasniegt IBM-1 ietvaros, uzlabojas kodoliem  $SU(3)$  robežgadījuma virzienā.  $O(6)$  robežgadījuma kodoliem vispārējā pielāgojuma kvalitāte visiem

iesaistītajiem eksperimentālajiem līmeņiem ir ievērojami sliktāka, un atkarība no  $\chi$  vērtības ir spilgtāk izteikta. Izstieptās-saspīestās formas fāzu pāreja ir pēkšņa, īpaši osmija un volframa kodoliem.

Tika atrasts, ka izmantotā IBM-1 versija neļauj labā kvalitātē aprakstīt visus novērotos zemās enerģijas līmeņus apskatītajiem kodoliem fāzu pārejas kritiskās līnijas  $E(5) - O(6)$  apkārtņē. Ja var veiksmīgi atveidot  $K^\pi = 0^+$  pamatstāvokļa joslu un  $K^\pi = 2^+$  kvazi  $\gamma$ -joslas līmeņus, tad, ja pievieno novērotos kolektīvos  $0^+$  un  $4^+$  stāvokļus, tie kopā nesader. Turpretī, tās modeļa parametru vērtības, kas uzlabo šo papildstāvokļu aprakstu, izraisa kvazi  $\gamma$ -joslas nepāru spina līmeņu novirzi tālu no to eksperimentālajām vērtībām. Šāda uzvedība ir izskaidrojama ar novērotās fāzu pārejas sarežģīto dabu -- tā notiek pie dažādām kritiskā parametra  $\chi$  vērtībām atkarībā no ierosinājuma enerģijas, t.i., ir iespējams novērot izstieptās un saspīestās formas līdzspastāvēšanu vienā kodolā (skat., piem., [39]).

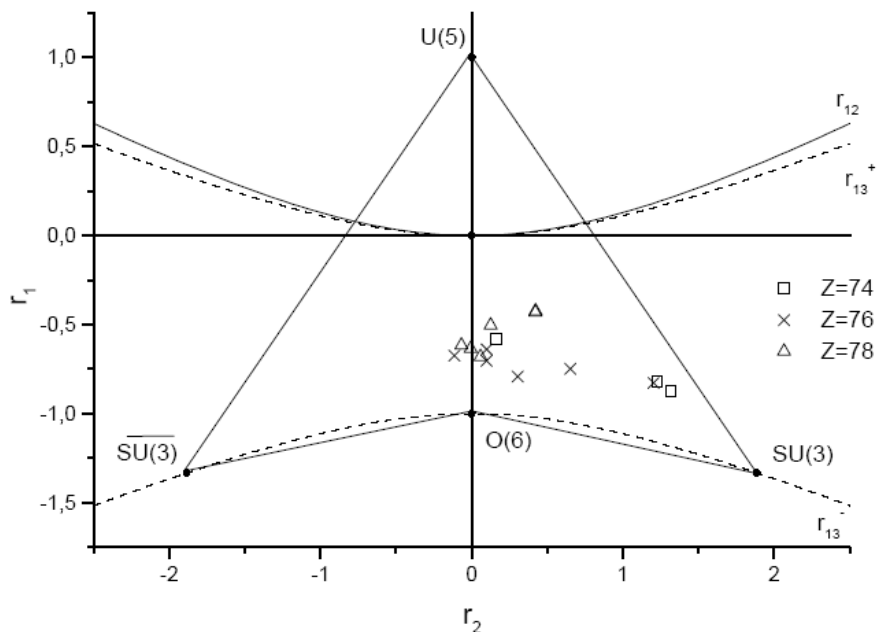
Tālāk prom no  $O(6)$  kritiskā punkta visus eksperimentālos līmeņus līdz pat 2.5 MeV var veiksmīgi aprakstīt izmantojot vienu un to pašu IBM-1 parametru komplektu. Bez tam, parametru vērtības kaimiņu kodoliem virzienā uz  $SU(3)$  robežgadījumu ir līdzīgas, kas nav spēcīgā  $O(6)$  robežgadījuma tuvumā. Tas nozīmē, ka jābūt ārkārtīgi uzmanīgam ar blakus esošo kodolu IBM-1 parametru vērtību izmantošanu dotā kodola aprakstam. Šāda pieeja nav izmantojama kodoliem, kas pieder pie deformācijas pārejas apgabaliem.

Tabulas (4) divās pēdējās kolonnās ir dotas vērtības kontroles parametriem  $r_1$  un  $r_2$ , kas tiek izmantoti kodola formas fāzu pāreju katastrofu teorijas analizē. Šie parametri ļauj saistīt pilnā IBM-1 modeļa parametru komplektu  $(\varepsilon', \eta, \kappa, \omega, \xi, \chi)$ , kas iegūts katram no apskatītajiem kodoliem, ar punktu „bezdelīgas astes” fāzu diagrammā, raksturojot kodola deformāciju un tās stabilitāti. Kontroles parametru vērtības, kas iegūtas W, Os un Pt izotopiem ar  $184 \leq A \leq 194$ , ir attēlotas kā punkti  $(r_1, r_2)$  parametru telpas diagrammā (attēls (6)). Var redzēt, ka visi aplūkotie kodoli atrodas apgabalā zem  $r_{12}$  bifurkācijas kopas (vienādojums (25)), kas atdala sfēriskos un deformētos kodolus.

Tabula 4: IBM-1 parametru vērtības  $184 \leq A \leq 194$  apgabala W, Os un Pt kodoliem.

Nucleus	$N_b$	$\varepsilon'$ (MeV)	$\kappa$ (MeV)	$\eta$ (MeV)	$\omega$ (MeV)	$\chi$	$m$	$d$ (MeV)	$r_1$	$r_2$
$^{184}\text{W}$	12	0.024	-0.03094	0.0263	-0.00420	-1.17170	12	0.0155	-0.87412	1.31552
$^{186}\text{W}$	11	0.017	-0.03096	0.0290	-0.00412	-1.13056	12	0.0451	-0.82056	1.22351
$^{188}\text{W}$	10	0.008	-0.04480	0.0112	0.01080	-0.19230	9	0.0455	-0.57963	0.16004
$^{184}\text{Os}$	12	0.028	-0.03300	0.0272	-0.00340	-1.11133	12	0.0253	-0.82736	1.20022
$^{186}\text{Os}$	11	0.025	-0.04400	0.0276	-0.00420	-0.67082	12	0.0280	-0.74747	0.65199
$^{188}\text{Os}$	10	0.026	-0.07900	0.0170	-0.00700	-0.31305	11	0.0775	-0.79163	0.30385
$^{190}\text{Os}$	9	0.010	-0.07500	0.0142	0.00100	-0.10733	13	0.0907	-0.70298	0.09769
$^{192}\text{Os}$	8	0.005	-0.06650	0.0185	0.00160	-0.11180	13	0.1069	-0.63925	0.09788
$^{194}\text{Os}$	7	0.005	-0.09500	0.0150	-0.00200	0.12969	7	0.0657	-0.67312	-0.11630
$^{184}\text{Pt}$	12	0.015	-0.02440	0.0175	0.01360	-0.55902	12	0.0970	-0.43119	0.42030
$^{186}\text{Pt}$	11	0.015	-0.02450	0.0195	0.01100	-0.55902	12	0.0631	-0.42336	0.42120
$^{188}\text{Pt}$	10	0.012	-0.04000	0.0255	0.00900	-0.15652	11	0.0977	-0.50327	0.12400
$^{190}\text{Pt}$	9	0.009	-0.08100	0.0190	0.00235	-0.06261	13	0.0891	-0.68075	0.05615
$^{192}\text{Pt}$	8	0.013	-0.08400	0.0195	0.00300	0.00894	12	0.1471	-0.63467	-0.00780
$^{194}\text{Pt}$	7	0.005	-0.09200	0.0195	0.00210	0.08050	13	0.1445	-0.61535	-0.06942





6. attēls: Katastrofu teorijas kontroles parametru  $r_1, r_2$  vērtības, kas iegūtas W, Os un Pt kodoliem ar  $184 \leq A \leq 194$ .

Tagad apskatīsim Maksvela punktu komplektu  $(r_1, r_2)$  parametru telpā. Šajos punktos klasiskā enerģijas virsma pieņem to pašu vērtību divām vai vairākām kontroles parametra kritiskajām vērtībām, t.i., kļūst iespējama dažādu formu vienlaicīga pastāvēšana. Maksvela punktu komplekti, kas saistīti ar enerģijas virsmas minimumu  $(r_{13}^+)$  un maksimumu  $(r_{13}^-)$  pie  $\beta_c = 0$ , tiek noteikti ar vienādojumu [8]:

$$r_{13}^{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{r_2^2}{2}}. \quad (28)$$

Cits Maksvela komplekts priekš  $\beta_c = \sqrt{r_1}$  veido koordinātas punktus uz negatīvās  $r_1$  pusass pie  $r_2 = 0$ ; šis punktu komplekts sakrīt ar  $E(5)-O(6)$  kritisko līniju starp izstiepto  $r_2 > 0$  un saspiesto  $r_2 < 0$  deformētajām kodola formām.

Veiktais pētījums par pilnās IBM-1 versijas klasiskās enerģijas funkcionāli parādīja, ka tam ir izteikts izstieptās formas minimums ( $\beta > 0$ ) apgabalā  $r_{13}^- < r_1 < 0$ , kurā atrodas kontroles parametru vērtības visiem apskatītajiem kodoliem ar  $184 \leq A \leq 194$ . Papildus saspiestās formas minimums ir segla punkts, kas ir nestabils attiecībā pret kodola asimetrijas parametru  $\mathcal{Y}$ . Tas nozīmē, ka pie augstākiem ierosinājumiem ir iespējamas gan izstieptās formas, gan saspiestās formas struktūras un šādas vienlaicīgās pastāvēšanas iespējas pieaug, ja  $r_1$  vērtība tuvojas nullei. Pie ( $\beta < 0$ ) attēls ir spoguļsimetrisks attiecībā pret  $r_1$  negatīvo pusasi: pastāv stabils saspiestās formas minimums ar  $\mathcal{Y}$ -nestabilo izstieptās formas segla punktu.

Kā varēja sagaidīt, <sup>184,186</sup>W kodoli ir tuvi stabilam aksiāli deformētam  $SU(3)$  robežgadījumam. Tie no apskatītajiem kodoliem, kam ir  $|r_2| \leq 0.2$  (skat. tabulu (4)) atrodas apgabalā, kurā atoma kodola forma mainās no izstieptās uz saspiesto. Darbā [6] bija parādīts, ka  $\mathcal{X}$  ir kontroles parametrs kodola fāzu pārejai no izstieptās formas uz saspiesto ar kritisko punktu pie  $\mathcal{X} = 0$ , kas atbilst  $O(6)$  robežgadījumam. Faktiski šī fāzu pāreja var notikt jebkurā punktā uz līnijas, kas savieno Kastēna trijstūra trīskāršo

punktu  $E(5)$  ar  $O(6)$ -simetrijas punktu pa vidu līnijai, kas savieno maksimālās kvadrupolās deformācijas punktus  $SU(3)$  un  $\overline{SU(3)}$ . Mēs esam piešķīruši <sup>192,194</sup>Pt kodolu  $\chi$  vērtībām plus zīmi, atbilstoši to eksperimentālajām elektriskā kvadrupolā momenta  $Q$  vērtībām. Plus zīme <sup>194</sup>Os kodola, kuram nav  $Q$  mērījumu datu,  $\chi$  vērtībai tiek paredzēta, izejot no novērotās  $r_2$  vērtību atkarības kaimiņu osmija kodolos. Priekš <sup>184,186</sup>Pt noteiktā  $(r_1, r_2)$  punktu atrašanās vieta norāda, ka šo kodolu pamatstāvokļa josla atbilst izstieptai formas, kamēr ierosinātās joslas atbilst saspīestai formai. Pastāv liela iespējamība, ka līdzīga formu līdzāspastāvēšana ir novērojama arī <sup>188</sup>W gadījumā.

Lai pētītu sakarības starp kodola formas fāzu pārejām un kvantu haosu  $A \sim 190$  apgabalā, mēs esam veikuši statistisko un dinamisko kvantu haosa kritēriju analīzi atkarībā no  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  fāzu pārejas kontroles parametra  $\chi$ , kā arī atkarībā no katastrofu teorijas būtiskajiem kontroles parametriem  $(r_1, r_2)$ .

Vispirms apskatīsim kvantu haosa statistisko kritēriju – starplīmeņu attālumu sadalījumu  $P(S)$ . Šī mērķa īstenošanai mēs ņemām katram kodolam visas aprēķinātās IBM-1 īpašvērtības ar spiniem no 0 līdz 8 un izveidojām sakārtotu teorētisko enerģiju spektru. Brodī parametra  $\zeta$  pielāgošanas rezultāti visu 15 apskatīto kodolu gadījumā ir doti tabulā (5). Mazāko kvadrātu metodes piemērošanas kvalitāti raksturo lielums  $d' = \sum_{i=1}^{m'} P(S/\langle S \rangle) - P_B(S/\langle S \rangle)^2$ , kur  $m'$  ir līmeņu atstarpju skaits. Iegūto  $P(S)$  sadalījumu papildus raksturlielumi ir  $S$  vidējā vērtība un novirze  $\sigma_S^2$ . Līmeņu atstarpju vidējās vērtības pieaugums norāda uz pieaugošu sajaukšanos attālinoties no  $SU(3)$  robežgadījuma.

Tabula 5: Starplīmeņu attāluma sadalījuma  $P(S)$  pielāgošanas rezultāti  $184 \leq A \leq 194$  apgabala W, Os un Pt kodoliem.

Nucleus	$N_b$	$m'$	$\langle S \rangle$	$\sigma_S^2$	$\zeta$	$d'$
<sup>184</sup> W	12	205	0.0252	0.0017	0.000	0.041
<sup>186</sup> W	11	169	0.0267	0.0020	0.000	0.050
<sup>188</sup> W	10	137	0.0476	0.0183	0.000	0.623
<sup>184</sup> Os	12	205	0.0265	0.0020	0.000	0.041
<sup>186</sup> Os	11	169	0.0306	0.0023	0.000	0.052
<sup>188</sup> Os	10	137	0.0453	0.0028	0.000	0.052
<sup>190</sup> Os	9	108	0.0452	0.0024	0.056	0.046
<sup>192</sup> Os	8	83	0.0474	0.0022	0.081	0.024
<sup>194</sup> Os	7	61	0.0636	0.0034	0.606	0.028
<sup>184</sup> Pt	12	205	0.0427	0.0096	0.000	0.169
<sup>186</sup> Pt	11	169	0.0396	0.0042	0.120	0.010
<sup>188</sup> Pt	10	137	0.0454	0.0029	0.000	0.033
<sup>190</sup> Pt	9	108	0.0525	0.0029	0.169	0.011
<sup>192</sup> Pt	8	83	0.0604	0.0036	0.307	0.025
<sup>194</sup> Pt	7	61	0.0696	0.0044	0.112	0.025

Var redzēt, ka  $P(S)$  sadalījuma forma mainās ļoti lēni virzoties prom no  $SU(3)$  robežgadījuma puses: W un Os kodoliem ar  $A \leq 188$  praktiski nav iespējams atšķirt  $P(S)$  no Puassona formas. Turpretī,  $E(5) - O(6)$  kritiskās līnijas tuvumā blakus

esošajiem izotopiem tiek novērotas stipras haotiskuma izmaiņas, kas atspoguļo kodola formas nestabilitāti un novērotās fāzu pārejas sarežģīto raksturu.

Statistiskais kvantu haosa kritērijs  $P(S)$  raksturo hamiltoniāna īpašvērtību sadalījumu un tāpēc nav atkarīgs no modeļa diagonalizācijas bāzes. Sistēmas dinamisko kvantu haosa kritēriju uzvedība raksturo tā novirzi no simetrijas īpašībām, kas piemīt izvēlētajās regulārās sistēmas hamiltoniānam. Viļņu funkciju entropija  $W(\Psi_i)$ , tāpat kā bāzes stāvokļu fragmentācijas platums  $\kappa(\Phi_k)$  vai jebkurš cits dinamiskais kvantu haosa kritērijs, kas tiek novērtēts, izmantojot apskatīto stāvokļu viļņu funkcijas, ir atkarīga no hamiltoniāna diagonalizācijas bāzes izvēles. Pilno IBM-1 hamiltoniānu parasti diagonalizē piecu dimensiju sfēriskā harmoniskā oscilatora īpašfunkciju  $U(5)$ -simetriskajā bāzē, kamēr fāzu pāreju no izstieptās formas uz saspiesto galvenokārt analizē  $SU(3)$  simetriskajā aksiālā rotatora viļņu funkciju bāzē (skat., piem., [6]). Taču mēs jau esam atzīmējuši, ka aprakstot kodolus, kas pieder  $A \sim 190$  apgabalam,  $O(6)$  kritiskā punkta vietā būtu jāņem vērā visa  $E(5)-O(6)$  kritiskā līnija, jo pastāv būtiska ietekme no robežpārejas no deformētā stāvokļa uz sfērisko. Tāpēc mēs uzskatām, ka ir pamats veikt IBM-1 hamiltoniāna diagonalizāciju sfēriskā  $U(5)$ -robežgadījuma bāzē un analizēt dinamisko kvantu haosa kritēriju uzvedību no šī skatupunkta.

Attēlā (7) parādītas aprēķinātās  $W^{U(5)}(\Psi_i)$  vērtības atkarībā no  $SU(3)-O(6)-\overline{SU(3)}$  fāzu pārejas kontroles parametra  $\mathcal{X}$ . Var redzēt, ka  $W^{U(5)}(\Psi_i)$  sasniedz savu maksimālo vērtību  $SU(3)$  robežgadījumā un pakāpeniski samazinās  $O(6)$  kritiskā punkta virzienā. Šīs atkarības slīpums palielinās līdz ar bozonu skaitu  $N_b$ , kas atbilst eksperimentāli novērotai ainai, ka volframa izotopu gadījumā fāzu pāreja ir pēkšņāka nekā platīna gadījumā [39].

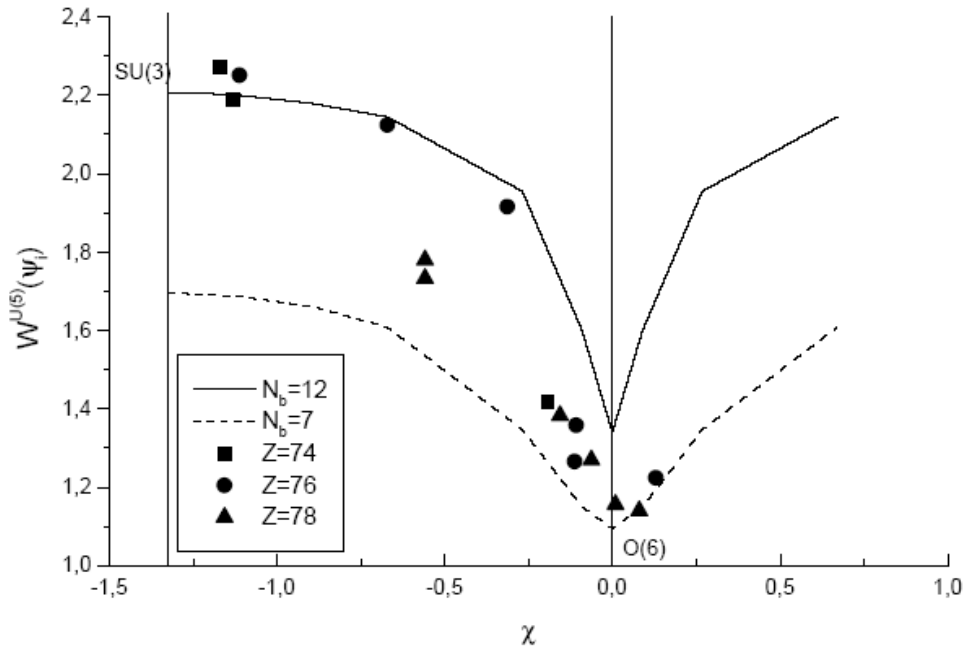
Iegūto datu analīze ļauj izdarīt šādus secinājumus:

a) visiem  $184 \leq A \leq 194$  volframa, osmija un platīna kodoliem, izņemot  $^{192}\text{Pt}$ , maksimālās dinamisko kvantu haosa kritēriju vērtības ir iegūtas stāvokļiem ar spina vērtībām  $I = 2$ . Tas atšķiras no statistiskā haosa gadījuma, kad maksimālā haosa pakāpe visos gadījumos tika novērota  $I = 0$  stāvokļiem. Taču, ja apskata dinamiskā haosa kritērija attiecības pret atbilstošo  $W_{\max}(n)$  vērtību, tad maksimālā attiecība tiek iegūta  $I^+ = 0_1^+$  pamatstāvokļa gadījumā kodoliem kritiskās līnijas  $E(5)-O(6)$  apkārtnē.

b) dinamiskā haosa kritēriju vērtības samazinās kritiskās līnijas  $E(5)-O(6)$  virzienā līdz ar izstieptās-saspīestās formas fāzu pārejas kontroles parametra  $\mathcal{X}$  vērtību un  $r_{12}$  bifurkācijas kopas virzienā līdz ar kontroles parametra  $|r_1|$  vērtību (skat. tabulu (4)). Šāda uzvedība ir raksturīga IBM-1 viļņu funkcijām, kas aprēķinātas sfēriskajā  $U(5)$  bāzē;

c) kodoliem ar  $SU(3)$  tipa spektru maksimālās viļņu funkciju entropijas vērtības tiek iegūtas  $I = 2_2$  stāvokļiem, t.i.  $K^\pi = 2^+$   $\gamma$ -vibrācijas joslas pamatlīmeņiem, kamēr kodoliem ar  $O(6)$  tipa spektru maksimālās viļņu funkciju entropijas vērtības ir līmeņiem, kas pieder  $K^\pi = 0^+$  pamatstāvokļa joslai;

d) katrā izotopu ķēdē vismazākās dinamiskā haosa kritērija vērtības tiek iegūtas kodoliem, kuri ir vistuvāk izstieptās-saspīestās formas fāzu pārejas kritiskajai līnijai  $E(5)-O(6)$ : attiecīgi  $^{188}\text{W}$ ,  $^{190}\text{Os}$  un  $^{192}\text{Pt}$ .



7. attēls:  $I = 0^+$  pamatstāvokļa viļņu funkcijas entropijas  $W^{U(5)}(\Psi_i)$  vērtības atkarībā no fāzu pārejas kontroles parametra  $\chi$   $184 \leq A \leq 194$  apgabala W, Os un Pt kodoliem. Nepārtrauktā līnija parāda teorētisko  $\chi$  atkarību  $N_b = 12$  gadījumā (pie  $^{184}\text{W}$   $SU(3)$  robežgadījuma parametriem), kamēr pārtrauktā līnija –  $N_b = 7$  gadījumā (pie  $^{194}\text{Pt}$   $O(6)$  robežgadījuma parametriem).

Kvantu haosa kritēriju, kas aprēķināti izmantojot algebrisko pilno IBM-1 versiju, izturēšanos var salīdzināt ar to, kas tiek novērota ģeometriskā cietā trīsasu rotatora modeļu ietvaros.

Viļņu funkciju entropija cietā trīsasu rotatora modeļa gadījumā strauji pieaug  $\gamma = 30^\circ$  virzienā. Atkarība no kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  ir vājāka, parādot viļņu funkciju entropijas samazināšanos pie lielākām  $\beta$  vērtībām. Turpretī, IBM-1 hamiltoniāna klasiskās enerģijas minimumi nav atkarīgi no kodola asimetrijas leņķa  $\gamma$  vērtībām, t.i., iegūtie enerģijas segla punkti ir  $\gamma$ -nestabili [8]. Tomēr tiek pieņemts, ka  $\gamma = 0^\circ$  izstieptās deformācijas  $SU(3)$ -robežgadījumā,  $\gamma = 30^\circ$   $\gamma$ -nestabilā  $O(6)$  robežgadījumā un  $\gamma = 60^\circ$  saspieptā  $SU(3)$ -simetriskā rotatora gadījumā.  $O(6)$  robežgadījums ir kritiskais punkts gan  $\beta$ -, gan  $\gamma$ -deformācijām [6]. Eksperimentālie dati nedod iespēju atšķirt statisko kodola triaksialitāti no dinamiskās. Tāpēc ir iespējams salīdzināt rezultātus, kas iegūti izmantojot IBM-1, ar analogiem lielumiem, kas aprēķināti cietā trīsasu rotatora gadījumā.

Tomēr, lai veiktu dinamisko kvantu haosa kritēriju skaitlisku salīdzinājumu abu modeļu ietvaros, būtu jālieto IBM-1 viļņu funkcijas, kas iegūtas diagonalizējot modeļa hamiltoniānu aksiāli simetriskā rotatora  $SU(3)$ -robežgadījuma viļņu funkciju bāzē, kas tiek izmantota arī, lai diagonalizētu ģeometriskā cietā trīsasu rotatora modeļa hamiltoniānus. Šāds detalizēts salīdzinājums ir nākotnes pētījumu tēma.

## 6. Secinājumi

Šajā disertācijās izvirzīto darba uzdevumu (skat. nodaļu 1.2.) izpildi var raksturot apkopojot rezultātus, kas tika iegūti mūsu kodola formas fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumos izmantojot pāra-pāra kodolu ģeometriskos un algebriskos modeļus.

1. Tika iegūtas precīzas analītiskas izteiksmes klasiskās enerģijas funkcionāla  $E_{cl}$  minimumu nosacījumiem atkarībā no kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  vairākās algebriskā bozonu mijiedarbības modeļa versijās:

- a) vienkāršotā divu parametru IBM-1 Kastēna versijā;
- b)  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniāna ar pievienoto kubisko  $d$ -bozonu mijiedarbību;
- c)  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniāna ar pievienoto kubisko kvadrupolā operatora loekli  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$  divos variantos –  $O(6)$  simetriju saglabājošā un  $O(6)$  simetriju nesaglabājošā;
- d) pilnajā IBM-1 versijā.

Atbilstošās klasiskās enerģijas virsmas tika analizētas atkarībā no IBM-1 modeļa parametru vērtībām izpētot kodola formas fāzu pārejas no sfēriskās uz deformēto un no izstieptās uz saspiesto. Tika konstatēts, ka:

a) mūsu metodes pielietošana vienkāršotās IBM-1 Kastēna versijas klasiskās enerģijas funkcionāla minimuma problēmas risināšanai ļauj iegūt precīzas deformācijas parametra  $\beta$  vērtības katrā Kastēna trijstūra  $(\eta, \chi)$  punktā. Iegūtās  $E_{cl}$  minimuma nosacījuma kubiskā vienādojuma saknes  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ir sarežģītas un vispārīgā gadījumā kompleksas funkcijas no bozonu skaita  $N_b$  un IBM-1 modeļa parametriem. Šīs izteiksmes ir labi piemērotas fāzu pāreju kritisko līniju un kritisko punktu analīzei, kā arī citiem pētījumiem, kuros tiek izmantots apskatītais modelis;

b) izmantojot IBM-1  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānu ar pievienoto kubisko  $d$ -bozonu mijiedarbības loekli  $E_{cl}$  izteiksmes minimumu, kas atbilst stabilai triaksiālai deformācijai, var iegūt vienīgi tad, ja tiek ņemta vērā visa trīsbozonu mijiedarbības locekļu summa ar  $L' = 0, 2, 3, 4, 6$ , nevis tikai  $L' = 3$  loceklis, kā tika uzskatīts līdz šim. Tāpat tika parādīts, ka šis triaksiālās formas minimums ir galīga bozonu skaita efekts, kas pazūd, ja  $N_b \rightarrow \infty$ .

c) apskatot  $O(6)$  robežgadījuma hamiltoniānu ar pievienoto kubisko  $[\mathbf{QQQ}]^{(0)}$  loekli galvenā uzmanība tika veltīta apgabaliem, kuros  $E_{cl}$  izteiksmes minimumu nosacījumu vienādojumiem ir tikai kompleksās saknes. Šo apgabalu robežas nosaka fāzu pāreju no sfēriskās formas uz deformēto. Tika analizēti arī izstieptās-saspīestās formas fāzu pārejas un deformāciju trīskāršā punkta nosacījumi. Analīze tika veikta abām modeļa hamiltoniāna versijām –  $O(6)$ -simetriskai un  $O(6)$ -nesimetriskai.

$O(6)$ -simetriskās modeļa versijas gadījumā mūsu rezultāti, kas tika iegūti izmantojot precīzā atrisinājuma metodi, parādīja, ka sfēriskās formas apgabals veido noslēgtu elipsoīdam līdzīgu figūru, kas atšķiras no agrāk iegūtajiem rezultātiem darbā [28]. Formas fāzu pāreju nosacījumu analīze  $O(6)$ -nesimetriskā hamiltoniāna gadījumā iepriekš citu autoru darbos netika veikta.

d) detalizētā klasiskās enerģijas  $E_{cl}$  funkcionāla  $E_{cl}(r_1, r_2; \beta)$  minimumu nosacījumu analīze pilnās IBM-1 versijas gadījumā, kas tika veikta iegūstot kubiskā vienādojuma trīs sakņu  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) precīzās izteiksmes, līdzīgi kā tas tika darīts vienkāršotās Kastēna versijas gadījumā, ļāva noteikt formas fāzu pāreju kritisko līniju un punktu koordinātas katastrofu teorijas kontroles parametru  $r_1$  un  $r_2$  telpā. Sakņu  $\beta_{0i}$

reālo un komplekso daļu īpašības tika analizētas kontroles parametru telpas diagrammas „sfēriskajā” un „deformētajā” daļās;

e) klasiskās enerģijas  $E_{cl}$  minimumu nosacījumi, kas iegūti izmantojot precīzā atrisinājuma metodi, tika salīdzināti ar rezultātiem, kas iegūti pielietojot Landau fāzu pāreju teorijas pieeju, kurā augstākās kārtas  $E_{cl}$  izvīzījuma locekļi netiek ievēroti. Vienkāršotās IBM-1 Kastēna versijas gadījumā kvalitatīvie secinājumi, kas seko no mūsu fāzu pāreju kritisko līniju un punktu analīzes, ir līdzīgi tiem, kas iegūti Landau teorijas pieejā. Tomēr klasiskās enerģijas minimuma uzdevuma analītiskais atrisinājums ļauj iegūt precīzākas  $\beta_0$  un  $E_{cl}(N_b, \eta, \chi; \beta_0)$  skaitliskās vērtības.

Pilnās IBM-1 versijas gadījumā tika novērtēta augstākās kārtas locekļu ievērošana  $E_{cl}$  izvīzījumā. Tika atrasts ka, lai iegūtu līdzīgu klasiskās enerģijas minimuma nosacījumu kā izmantojot precīzā atrisinājuma metodi,  $E_{cl}$  izvīzījumā jāņem vērā visu pakāpju locekļi līdz  $\beta^5$ . Ierastā prakse ņemt vērā tikai  $\sim \beta^2$  un  $\sim \beta^3$  locekļus var dot izkropļotus rezultātus. Tātad, ja ir iespējams atrast klasiskās enerģijas funkcionāļa minimuma nosacījumu vienādojumu precīzo analītisko atrisinājumu, tad šāda pieeja kodola formas fāzu pāreju pētījumiem ir atzīstama par labāku nekā tuvinātā Landau teorijas metode.

2. Statistiskais – starplīmeņu attālumu sadalījums  $P(S)$ , un dinamiskie – viļņu funkciju entropija  $W(\Psi_i)$  un bāzes stāvokļu fragmentācijas platums  $\kappa(\Phi_k)$ , kvantu haosa kritēriji tika pētīti izmantojot algebrisko vienkāršoto IBM-1 Kastēna versiju, kā arī divus ģeometriskā cietā trīsasu rotatora modeļus pāra-pāra kodoliem – Davidova modeli, kas ir atkarīgs tikai no asimetrijas leņķa  $\gamma$ , un Bravina-Fedorova modeli, kas ir atkarīgs no abiem kvadrupolās deformācijas parametriem  $\gamma$  un  $\beta$ . Kvantu haosa kritēriju uzvedība tika analizēta atkarībā gan no kodola kvadrupolās deformācijas parametriem, gan no kodola formas fāzu pāreju kontroles parametriem Kastēna trijstūra telpā. Tāpat tika izpētīta arī atkarība no kodola spina un diagonalizētās modeļa hamiltoniāna matricas ranga.

Vienkāršotās IBM-1 Kastēna versijas gadījumā statistiskā un dinamisko kvantu haosa kritēriju vērtības ir aprēķinātas pie  $N_b = 8$  izvēlētajos punktos  $(\eta, \chi)$  parametru telpā, kuru prezentē Kastēna trijstūris. Modeļa parametru vērtības tika izvēlētas no apgabala zem  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$  fāzu pārejas līnijas, kas atdala sfērisko un deformēto formu, līdz  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  līnijai, kas atbilst maksimālai deformācijai.

Kvantu haosa statistiskā kritērija aprēķinu rezultāti rāda, ka vienkāršotā IBM-1 Kastēna versija pie  $N_b = 8$  ir samērā regulāra. Starplīmeņu attāluma sadalījuma  $P(S)$  novirze no Puassona formas ir niecīga pat maksimālās sajaukšanās gadījumā tālu no Kastēna trijstūra virsotnēm. Pie šāda salīdzinoši neliela bozonu skaita  $P(S)$  sadalījums ir stipri atkarīgs no modeļa bāzes apraušanas, kas iespaido augstāko spinu stāvokļu enerģijas vērtības.

Dinamisko kvantu haosa kritēriju aprēķinu rezultāti rāda, ka uz  $U(5) - SU(3)$  līnijas un apgabalā blakus tai (ar  $\chi = 0.75 \cdot \chi_{\max}$ )  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  un  $W(\Psi_i)_{av}$  vērtības ir korelētas: tās pieaug no līnijas vidusdaļas (ar  $0.75 \cdot \eta_{E(5)} = 0.5625$ ) līdz Kastēna trijstūra apakšējai malai ( $\eta = 0$ ). Korelācija starp  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  un  $W(\Psi_i)_{av}$  vērtībām atkarībā no parametra  $\chi$  vērtības, kad tas mainās virzienā no  $X(5) - SU(3)$  līnijas uz pirmās kārtas fāzu pārejas līniju  $E(5) - O(6)$ , pazūd, kad sajaukšanās pieaug.

Kvantu haosa aprēķinu rezultāti Davidova modeļa gadījumā un Bravina-Fedorova modeļa gadījumā, kas veikti pie trim dažādām  $\beta$  vērtībām, rāda, ka kvantu

haosa kritēriju uzvedība cietā triaksiālā rotatora gadījumā galvenokārt ir atkarīga no asimetrijas leņķa  $\gamma$ , atkarība no  $\beta$  ir nenozīmīga. Dinamisko kvantu haosa kritēriju maksimālās vērtības tiek sasniegtas pie  $\gamma = 30^\circ$  gan pāra, gan nepāra spina  $I$  vērtībām. Statistiskais cietā triaksiālā rotatora haotiskums ir maksimāls ( $\zeta = 1$ ) pie  $18^\circ \leq \gamma \leq 29^\circ$ ; pie  $\gamma = 30^\circ$  sistēmas regularitāte atkal pieaug.

Ģeometrisko cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumā tika parādīts, ka vidējo vidējās viļņu funkciju entropijas vērtības  $W(\Psi_i)_{av}$  pat maksimālās bāzes stāvokļu sajaukšanās gadījumā (pie  $\gamma = 30^\circ$ ) sasniedz tikai aptuveni 75-85 % no teorētiski iespējamās maksimālās  $W(\Psi_i)_{max}$  vērtības. Tas nozīmē, ka cietā trīsasu rotatora modeļa iekšējā struktūra nepieļauj lielāku haotiskuma pakāpi attiecībā pret aksiāli simetriskā rotatora īpašfunkciju bāzi. Nepieciešamība kontrolēt nosacījuma (10) izpildi, kas ierobežo iesaistīto stāvokļu sajaukšanās amplitūdas, noved pie tā, ka otro dinamisko kvantu haosa kritēriju  $\kappa(\Phi_k)$  var aprēķināt tikai tad, ja bāzes stāvokļu sajaukšanās pārsniedz noteiktu robežu, t.i. lielu asimetrijas leņķa vērtību gadījumā.

Dinamisko kvantu haosa kritēriju aprēķinu rezultāti Bravina-Fedorova modeļa gadījumā rāda, ka abu kritēriju:  $W(\Psi_i)$  un  $\kappa(\Phi_k)$ , vērtības samazinās, kad kvadrupolās deformācijas parametra  $\beta$  vērtība pieaug, kas arī tiek sagaidīts, jo neperturbētā sistēma ir aksiāli simetriskais rotators.

Iegūto cietā triaksiālā rotatora teorētisko enerģiju spektru analīze ļauj novērot enerģijas līmeņu blīvuma un viļņu funkciju entropijas raksturīgos maksimumus pie  $E_{ir} \approx (b/2)I^2$ , kas atbilst pārejai no rotācijas tipa līmeņu secības uz librācijas tipa secību. Šāda pāreja demonstrē [14], ka cietā triaksiālā rotatora modeļa kvantu statistika uzvedās tāpat kā citas anomālās kvantu sistēmas – viendimensijas harmoniskā oscilatora gadījumā. Šī pāreja tika izpētīta atkarībā no  $I$  un  $\gamma$  Davidova modeļa gadījumā un atkarībā no  $I$ ,  $\beta$  un  $\gamma$  Bravina-Fedorova modeļa gadījumā.

3. Iespēja izmantot bāzes stāvokļu fragmentācijas platumu  $\kappa(\Phi_k)$  kā dinamisko kvantu haosa kritēriju tika izpētīta algebriskās IBM-1 Kastēna versijas gadījumā un ģeometrisko cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumā. Tika parādīts, ka  $\kappa(\Phi_k)$ , līdzīgi kā parasti izmantotā viļņu funkciju entropija  $W(\Psi_i)$ , var tikt veiksmīgi izmantots, lai raksturotu kvantu haosu, kas piemīt modeļa hamiltoniānam izvēlētā neperturbētās kvantu sistēmas īpašfunkciju bāzē. Korelācija starp abiem kritērijiem tika novērota Kastēna trijstūra iekšējos apgabalos zem otrās kārtas fāzu pārejas līnijas  $X(5) - E(5) - \overline{X(5)}$ , kas atbilst kodola formas maiņai no sfēriskās uz deformēto, virzienā uz  $SU(3) - O(6) - \overline{SU(3)}$  pamata līniju.

Bāzes stāvokļu fragmentācijas platumu kritērija izmantošana ļauj veikt modeļa hamiltoniāna stāvokļu papildus sakārtošanu atbilstoši to  $\kappa(\Phi_k)$  vērtībai: atdalot mīkstā kvantu haosa stāvokļus ar  $\kappa(\Phi_k) < 1$  un cietā kvantu haosa stāvokļus ar  $\kappa(\Phi_k) > 1$ . Tad vidējās  $\kappa(\Phi_k)_{av}$  vērtības raksturo perturbētās sistēmas dinamisko haotiskumu kā veselu. Tika atrasts, ka teorētiski paredzēto pāreju no mīkstā haosa uz cieto haosu cietā trīsasu rotatora modeļu gadījumā var pētīt tikai sākot ar salīdzinoši augstu spina vērtību ( $I = 50$ ), kad bāzes stāvokļu skaits  $n \geq 26$ .

Mūsu aprēķinos mēs neesam novērojuši gludu pakāpenisku pāreju no mīkstā haosa ( $\kappa(\Phi_k) < 1$ ) uz cieto haosu ( $\kappa(\Phi_k) > 1$ ), t.i. cietā trīsasu rotatora modelī pāreja uz cieto haosu ir pēkšņa, ko var izskaidrot ar modeļa hamiltoniāna matricas trīsdiagonālo struktūru, kas palielina ierobežojuma (10) lomu  $\kappa(\Phi_k)$  vērtību aprēķināšanā.

4. Izstrādātās kvantu fāzu pāreju un kvantu haosa teorētisko pētījumu metodes tika pielietotas izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas analīzei volframa, osmija un platīna izotopu ķēdēs, kas pieder pārejas apgabalam pie  $A \sim 190$ . Šo trīs elementu kodolu formas mainās no stabilas izstieptās aksiālās simetrijas līdz asimetriskai  $\mathcal{V}$ -nestabilai formai.

Zemāko kolektīvo stāvokļu enerģijas un viļņu funkcijas 15 pāra-pāra kodoliem ar  $184 \leq A \leq 194$  tika aprēķinātas izmantojot pilno IBM-1 versiju. Modeļa parametru vērtības katram kodolam tika noteiktas pielāgojot teorētiskās enerģijas eksperimentāli noteiktajām enerģijas vērtībām visiem novērotajiem līmeņiem ar  $I \leq 8$  pamatstāvokļa joslas gadījumā un ar  $I \leq 6$  citu kolektīvo ierosinājumu gadījumā. Sakarības starp formas fāzu pārejām un kvantu haosa kritērijiem:  $P(S)$  un  $W(\Psi_i)$ , tika analizētas: a) atkarībā no  $SU(3)-O(6)-\overline{SU(3)}$  izstieptās-saspiestās formas fāzu pārejas kontroles parametra  $\mathcal{X}$ ; b) atkarībā no katastrofu teorijas kontroles parametriem  $r_1$  un  $r_2$ ; c) atkarībā no protonu un neitronu skaita  $Z$  un  $N$ ; d) atkarībā no līmeņa spina  $I$ .

Labā saskaņa tika iegūta kodoliem ar stabilu izstiepto deformāciju, kamēr fāzu pārejas apgabalā tuvu  $E(5)-O(6)$  kritiskajai līnijai, izmantojot vienu un to pašu IBM-1 modeļa parametru kopu, nevar veiksmīgi aprakstīt izstieptās pamatstāvokļa joslas un kvazi  $\mathcal{V}$ -joslas līmeņus kopā ar ierosināto kolektīvo  $0^+$  un  $4^+$  joslu līmeņiem. Tas norāda uz dažādu formu līdzāspastāvēšanu pamatstāvokļa un ierosināto stāvokļu joslu līmeņiem  $\mathcal{V}$ -nestabilas deformācijas apgabalā. Šādas līdzāspastāvēšanas cēlonis ir citas fāzu pārejas - no deformētās formas uz sfērisko, tuvums.

Tika atrasts, ka pāreja no izstieptās deformācijas uz saspiesto zemāko kolektīvo stāvokļu gadījumā notiek pie  $A = 194$  pāra-pāra osmija kodoliem un pie  $A = 192$  pāra-pāra platīna kodoliem. Izstieptā pamatstāvokļa un saspiesto ierosināto stāvokļu līdzāspastāvēšana tiek paredzēta  $^{184,186}\text{Pt}$  un  $^{188}\text{W}$  gadījumā.

Statistiskā haosa kritērija – starplīmeņu attālumu sadalījuma  $P(S)$  novērtēšana rāda, ka haotiskums lēni palielinās no  $SU(3)$  robežgadījuma puses, kur  $P(S)$  ir Puassona forma. Tomēr  $E(5)-O(6)$  kritiskās līnijas apkārtnē haotiskums izotopu ķēdē krasi mainās atspoguļojot novērotās fāzu pārejas sarežģīto raksturu.

Dinamiskā haosa kritērija – viļņu funkciju entropijas  $W^{U(S)}(\Psi_i)$  aprēķinu rezultāti W, Os un Pt kodoliem  $184 \leq A \leq 194$  apgabalā rāda, ka haotiskums attiecībā pret  $U(5)$ -simetrisko sfērisko bāzi samazinās  $E(5)-O(6)$  kritiskās līnijas virzienā katrai izotopu ķēdei. Izmaiņa ir pēkšņāka volframa kodolu gadījumā, kas izskaidrojams ar izstieptās aksiālās deformācijas lielāku stabilitāti  $Z = 74$  volframa gadījumā nekā  $Z = 78$  platīna gadījumā.

Aprēķinu rezultāti tika salīdzināti ar citu autoru rezultātiem, kas iegūti izmantojot atšķirīgas teorētiskas pieejas. Tika novērtēta iespēja salīdzināt rezultātus, kas iegūti algebriskā pilnā IBM-1 modeļa gadījumā, ar rezultātiem, ko var iegūt, izmantojot geometrisko cietā trīsasu rotatora modeli.

Kodola formas fāzu pāreju un to saistības ar kvantu haosu pētījumus varētu turpināt arī citos virzienos, piemēram:

- dažādu formu līdzāspastāvēšanas parādību, ko novēro pārejas apgabala kodoliem pie augstākam ierosinājuma enerģijām, pētījumi pilnā IBM-1 ietvaros;
- fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumi, izmantojot IBM-2 modeli, kurā tiek ņemta vērā nuklonu izospina atkarība;
- fāzu pāreju pētījumi nepāra un nepāra-nepāra kodoliem, kad notiek kodola serdes papildus polarizācija dēļ mijiedarbības ar valences nukloniem.



Šajā disertācijā iekļautie rezultāti ir nopublicēti trijos recenzējamajos žurnālu rakstos [R1, R3, R6] un vienā rakstā starptautiskās konferences materiālu krājumā [R5]. Viens žurnāla raksts ir nopublicēts vietējā zinātniskajā žurnālā.

Viens žurnāla raksta manuskripts [R4] tika iesniegts recenzējamā žurnālā 2007.gadā un pašlaik tiek pārskatīts un paplašināts, iekļaujot tajā papildus aprēķinu rezultātus. Žurnāla raksta manuskripts [R7] par fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumu rezultātiem  $A \sim 190$  kodolu apgabalā ir iesniegts recenzējamā žurnālā 2010.gada jūlijā.

Pētījumu rezultāti ir ziņoti gan starptautiskajās, gan vietējās zinātniskajās konferencēs: astoņi mutvārdu referāti – starptautiskie [A1, A3, A5, A7, A10] un vietējie [A2, A4, A6] un divās posteru sesijās – starptautiskā [A8] un vietējā [A9].

Lielākā daļa rezultātu, kas aplūkoti šajā promocijas darbā, ir iegūta Latvijas Zinātņu Padomes pētījumu projektu Nr. 05.1707 un Nr. 09.1194 ietvaros. Liela nozīme ir arī Eiropas Sociālā Fonda finansiālajam atbalstam, kas ļāva novest šo darbu līdz tā loģiskajam nobeigumam.

Gribu pateikties visiem LU CFI Kodolreakciju laboratorijas fiziķiem, ar kuriem es kontaktēju un strādāju savu maģistra un doktora studiju laikā kopš 2005.gada. Esmu pateicību parādā bijušajiem Kodolreakciju laboratorijas inženieriem Mag.phys. Andrejam Andrejevam un Leonīdam Neiburgam, kā arī bijušajiem LU studentiem: Aleksandram Dzalbam un Konstantīnam Bavrinam par viņu palīdzību dažos datorprogrammēšanas un skaitlisko aprēķinu veikšanas aspektos.

Īpašs paldies manai patreizējai zinātniskajai vadītājai Dr.phys. Tamārai Krastai, kas pārņēma šī doktora darba vadīšanas un padomdevēja uzdevumu pēc mana iepriekšējā skolotāja un konsultanta Dr.habil.phys Jura Tamberga negaidītās aiziešanas.

Un pēdējais, bet ne vismazākais, es gribu izteikt savu mīlestību un atzinību savai sievai un bērniem par viņu milzīgo pacietību un sapratni, kas deva man iespēju veltīt ievērojamu daļu sava laika fizikai.

## Promocijas darba autora publikāciju saraksts

### Žurnālu raksti

**R1.** J.Proskurins, A.Andrejevs, T.Krasta, J.Tamberg. Studies of Phase Transitions and Quantum Chaos Relationships in Extended Casten Triangle of IBM-1. Physics of Atomic Nuclei, 2006, vol.69, p.1248-1253.

**R2.** A.Andrejevs, T.Krasta, J.Proskurins, J.Tamberg. Precise Solution of the Classical Energy Functional for the Extended Casten Triangle of IBM-1. Latvian J.Phys.Tech.Sci., 2006, No.3, p.58-65.

**R3.** J.Proskurins, A.Andrejevs, T.Krasta, L.Neiburgs, J.Tamberg. Studies of the Classical Energy Limit of the Interacting Boson Model in the Case of Three-Body Interactions. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2007, vol.71, No.6, p.894-900.

**R4.** J.Proskurins, K.Bavrins, A.Andrejevs, T.Krasta, J.Tamberg. Study of Quantum Chaos in the Framework of Triaxial Rotator Model. Manuskripts uz 10 lapaspusēm, kas tika iesniegts žurnālam Physics of Atomic Nuclei 2007.gadā un patreiz tiek pārskatīts un papildināts.

**R5.** J.Proskurins, K.Bavrins, A.Andrejevs, T.Krasta, J.Tamberg. Study of quantum chaos in the framework of triaxial rotator models. In: Proc.13th Int. Conf. on Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics. Eds. A.Blazhev, J.Jolie, N.Warr, A.Zilges, AIP Conference Proceedings Vol.1090 (2009), pp.635-636.

**R6.** J.Proskurins, A.Andrejevs, T.Krasta, J.Tamberg. Phase transitions in the framework of complete version of IBM-1. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, Vol.73, No.2 (2009), pp. 241-244.

**R7.** J.Proskurins, T.Krasta, K.Bavrins. Study of the onset of chaos in the  $A \sim 190$  nuclear deformation phase transition region. Manuskripts uz 12 lapaspusēm, kas iesniegts publicēšanai žurnālā Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics 2010.g. septembrī.

### Konferenču tēzes

**A1** J. Proskurins, A. Andrejevs, T. Krasta, J. Tamberg. Studies of Phase Transitions and Quantum Chaos Relationships in Extended Casten Triangle of IBM-1. In: LV National Conference on Nuclear Physics "Frontiers in the Physics of Nucleus". June 28-July 1, 2005, St.-Petersburg, Russia. Book of Abstracts. St.-Petersburg, 2005, p.95.

**A2** J.Proskurins, A.Andrejevs, T.Krasta, L.Neiburgs, J.Tamberg. Studies of Classical Energy Limit of Interacting Boson Model in the Case of Triaxial Deformations. [Bozonu mijiedarbības modeļa klasiskās enerģijas pētījumi triaksiālo deformāciju gadījumā]. LU CFI 22. zinātniskās konferences referātu tēzes. Rīga, LU CFI, 2006.g. 29.-30. martā, 27. lpp.

**A3** J. Proskurins, A. Andrejevs, T. Krasta, L. Neiburgs, J. Tamberg. Studies of Classical Energy Limit of Interacting Boson Model in the Case of Three-Body Interactions. In: 56 International Conference "Nucleus-2006" on Problems of Nuclear

Spectroscopy and Structure of Atomic Nucleus, September 4-8, 2006, Sarov, Russia. Abstracts, Sarov 2006, pp.111-112.

**A4** J.Proskurins, K.Bavrins, A.Andrejevs, T.Krasta, J.Tamberg. Study of Quantum Chaos in the Framework of Triaxial Rotator Model. [Kvantu haosa pētījumi triaksiālā rotatora modelī]. LU CFI 23. zinātniskās konferences, veltītas LU profesora Ilmāra Vītola 75 gadu atcerei, referātu tēzes. Rīga, LU CFI, 2007.g. 13.-15. februārī, 12. lpp.

**A5** J. Proskurins, K. Bavrins, A. Andrejevs, T. Krasta, J. Tamberg. Study of Quantum Chaos in the Framework of Triaxial Rotator Model. In: 57 International Conference on Nuclear Physics Nucleus-2007, Fundamental Problems of Nuclear Physics, Atomic Power Engineering and Nuclear Technologies. June 25-29, 2007, Voronezh, Russia. Book of Abstracts, St.-Petersburg, 2007, p.191.

**A6** J.Proskurins, K.Bavrins, A.Andrejevs, J.Tamberg. Studies of Phase Transitions and Quantum Chaos in the Framework of Interacting Boson and Geometrical Nuclear Models. [Fāzu pāreju un kvantu haosa pētījumi bozonu mijiedarbības un ģeometriskajos kodolu modeļos.] LU CFI 24. zinātniskās konferences referātu tēzes, Rīga, LU CFI, 2008.g. 20.-22. februārī, 38. lpp.

**A7** J.Proskurins, A. Andrejevs, T. Krasta, J. Tamberg. Phase Transitions in the Framework of Complete Version of IBM-1. In: 58 International Meeting on Nuclear Spectroscopy and Nuclear Structure "Nucleus-2008". Fundamental Problems of Nuclear Physics, Nuclear Methods in Nanotechnology, Medicine and Nuclear Power Engineering. June 23-27, 2008, Moscow, Russia. Book of Abstracts. St.-Petersburg, 2008, p.165.

**A8** J. Proskurins, K. Bavrins, A. Andrejevs, T. Krasta, J. Tamberg. Study of quantum chaos in the framework of triaxial rotator models. In: 13th International Symposium on Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics, Cologne, Germany, August 25-29, 2008. Book of Abstracts, pp.174-175.

**A9** J.Proskurins, A.Andrejevs, K.Bavrins, T.Krasta, J.Tamberg. Use of Peres lattice method for the study of nuclear phase transitions. [Kodolu fāzu pāreju izpēte, izmantojot Peresa režģu metodi]. LU CFI 25. zinātniskās konferences materiāli. Rīga, Latvija, 2009.g. 11.-13. februārī, 38. lpp.

**A10** J. Proskurins, T. Krasta, K. Bavrins. Study of the onset of chaos in the  $A \sim 190$  nuclear deformation phase transition region. In: "Nucleus 2010. Methods of Nuclear Physics for Femto- and Nanotechnologies (LX Meeting on Nuclear Spectroscopy and Nuclear Structure)", 6-9 July 2010, St.-Petersburg, Russia. Book of Abstracts, St.-Petersburg, 2010, p.214.

## Atsauces

- [1] P. Cejnar, J. Jolie, *Progr.Part.Nucl.Phys.* 62, 62 (2009); nuclth/0807.3467.
- [2] Y. Alhassid, A. Novoselsky, N. Whelan, *Phys.Rev.Lett.* 65, 2971 (1990).
- [3] Y. Alhassid, N. Whelan, *Phys.Rev.Lett.* 67, 816 (1991).
- [4] P. Cejnar, J.Jolie, *Phys.Rev.E.* 58, 387 (1998); *Phys.Lett.B* 420, 241 (1998).
- [5] P. Cejnar, J. Jolie, *Phys.Rev.E* 61, 6237 (2000).
- [6] J. Jolie, F.F. Casten, P. von Brentano, V. Werner, *Phys.Rev.Lett.* 87, 162501 (2001).
- [7] J. Jolie, S. Heinze, A. Linnemann, V. Werner, P. Cejnar, R.F. Casten, in: *Proceedings of the 11th International Symposium on Capture Gamma Ray Spectroscopy and Related Topics*. Eds. J. Kvasil, P. Cejnar, M. Krtička (World Scientific, Singapore, 2003), p.36.
- [8] E. Lopez-Moreno, O. Castanos, *Phys.Rev.C.* 54, 2374 (1996).
- [9] V.E. Bunakov, in: *ISINN-2 Proceedings. Dubna 1994*. (JINR, E3-94-419, Dubna, 1994), p.76.
- [10] J.M. Eisenberg, W. Greiner. *Nuclear Theory. Vol. 1. Nuclear Models*. (North-Holland, Amsterdam-London, 1970).
- [11] A. Bohr, B. Mottelson, *Kgl.Dan.Vid.Selsk., Mat.-Fys. Medd.*, 27, No.16, 1 (1953).
- [12] A.S. Davydov, G.E. Filippov, *Nucl.Phys.* 8, 237 (1958).
- [13] V.R. Manfredi, L. Salasnich, *Phys.Rev.E* 64, 066201 (2001).
- [14] V.R. Manfredi, V. Penna, L. Salasnich, *Mod.Phys.Lett.B* 17, 803-812 (2003).
- [15] F. Iachello, A. Arima. *The Interacting Boson Model*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [16] D. Bonatsos. *Interacting Boson Models of Nuclear Structure*. (Clarendon Press, Oxford, 1988).
- [17] O. Scholten, in: *Computational Nuclear Physics 1, Nuclear Structure*. Eds. K. Langanke, J.A. Maruhn, S.E. Koonin (Springer, Berlin-Heidelberg, 1991), p.88.
- [18] R.F. Casten, D.D. Warner, *Rev.Mod.Phys.* 60, 389 (1988).

- [19] Y. Alhassid, N. Whelan, Phys.Rev.C 43, 2637 (1991).
- [20] J. Jolie, P. Cejnar, R.F. Casten, S. Heinze, A. Linnemann, V. Werner, Phys.Rev.Lett. 89, 2002, 182502 (2002).
- [21] H.-J. Stöckmann. Quantum Chaos. An Introduction. (Cambridge Univ. Press, 2000).
- [22] M.V. Berry, M. Tabor, Proc.Roy.Soc.A 356, 375 (1977).
- [23] O. Bohigas, M.J. Giannoni, C. Schmidt, Phys.Rev.Lett. 52, 1 (1984).
- [24] T.A. Brody, J. Flores, J.B. French, P.A. Mello, A. Pandey, S.S.M. Wong, Rev.Mod.Phys. 53 385 (1981).
- [25] V.E. Bunakov, F.F. Valiev, J.M. Chuvilsky, Izv.RAN, ser.fiz. 62, 41 (1998).
- [26] P. Van Isacker, J.-Q. Chen, Phys.Rev.C 24, 684 (1981).
- [27] K. Heyde et al., Phys.Rev.C 29, 1420 (1984).
- [28] G. Thiamova, P. Cejnar, Nucl.Phys.A 765, 97 (2006).
- [29] A.S. Davydov. Excited states of atomic nuclei. (Atomizdat, Moscow, 1967).
- [30] A.V. Bravin, A.D. Fedorov, Izv.AN SSSR, ser.fiz. 34, 454 (1970).
- [31] A.D. Fedorov, Yadernaya fizika (Sov.Journal of Nucl.Phys.) 15, 36 (1972).
- [32] NNDC On-Line Data Service from ENSDF database, <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.
- [33] J. Jolie, A. Linnemann, Phys.Rev. C, 68 (2003) 031301.
- [34] J.M. Arias, et al., Phys.Rev.C. 68, 041302, (2003).
- [35] F. Iachello, Phys.Rev.Lett. 87, 052502 (2001).
- [36] F. Iachello, Phys.Rev.Lett. 85, 3580 (2000).
- [37] Liao Ji-zhi, Wang Huang-sheng, Phys.Rev.C 49, 2465 (1994).
- [38] V.R. Manfredi, V. Salasnich, Int.J.Mod.Phys.E 4, 625 (1995).
- [39] P.D. Stevenson et al., Phys.Rev.C 72, 047303 (2005).