LATVIJAS UNIVERSITĀTE
LATVIJAS 31. ATKLĀTĀ FIZIKAS OLIMPIĀDE
2006. gada 29. aprīlī

V. Fļorovs, D. Docenko, V. Kaščejevs, D. Bočarovs

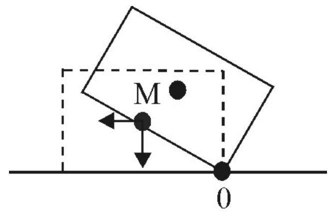
Uzdevumi un atrisinājumi

1. uzdevums. Eksperiments "Jocīgs ķeblis" *(9.–12. klase)*

Ķebli, kas stāv uz līdzenas grīdas, aiz malas pašķiebj nelielā leņķī un palaiž. Tas atgriežas normālā stāvoklī, taču nedaudz pārvietojas pacelto kāju virzienā.

Izskaidrojiet eksperimentu! (*Olimpiādes laikā eksperiments tika demonstrēts skolēniem.*)

Eksperimenta izskaidrojums.



Ķeblim atgriežoties stabilā stāvoklī pēc atbrīvošanas, tā smaguma centrs apraksta riņķa līnijas loku, pie tam šīs riņķa līnijas centrs *M* atrodas uz grīdas starp nepaceltām ķebļa kājām. Laika sprīdī, kad paceltās kājas saskaras ar zemi, ķebļa masas centra *M* ātrumam ir gan horizontālā, gan vertikālā komponente, jo masas centra rādiuss-vektors, kā redzams no zīmējuma, krēsla kāju atsitiena brīdī veido leņķi ar horizontālo virzienu. Kritiens uz horizontālu grīdu ir daļēji neelastīgs, tāpēc impulsa vertikālā komponente tiek ātri nodzēsta. Jo tuvāk kritiens ir absolūti neelastīgam, jo mazāk reižu ķeblis "palecās" pirms apstāšanās.

Taču impulsa horizontālā komponente pēc sitiena saglabājas un ķeblis tiek bremzēts tikai ar berzes spēku. Bet tam ir nepieciešams ilgāks laiks, kurā ķeblis paspēj paslīdēt uz priekšu.

2. uzdevums. “Turp un atpakaļ” *(9.–12. klase)*

Ķermenis sācis taisnvirziena vienmērīgi paātrinātu kustību punktā *A*. Pēc kāda laika t kopš kustības sākuma tas turpināja taisnvirziena kustību jau ar citu nemainīgu paātrinājumu, un pēc tikpat ilga laika t atgriežas punktā *A* ar ātrumu v.

Noteikt maksimālo attālumu S no punkta *A,* kādā ķermenis atradās.

Atrisinājums.

Tā kā ķermenis atgriezās atpakaļ uz punktu A, ir skaidrs, ka pēc laika t ķermeņa paātrinājums kļuva negatīvs (var teikt, ka kustība pēc paātrinājuma izmaiņas kļuva vienmērīgi palēnināta). Tādēļ pēc zināma laika arī ķermeņa kustības ātrums maina savu zīmi un tas atgriežas savā izejas punktā. Apzīmēsim punktu, kurā ķermenis mainīja savu paātrinājumu kā punktu B, bet pagrieziena punktu – kā punktu C.

No punkta A uz punktu B ķermenis kustējās laiku t ar paātrinājumu a, no punkta B uz punktu C ķermenis kustējās laiku t_1 ar paātrinājumu a_1, un pagrieziena punktā ātrums bija vienāds ar 0. Pēc tam ķermenis no punkta C laika intervālā t_2 atgriezās punktā A, kustoties ar tādu pašu paātrinājumu a_1. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $t_2 = t - t_1$.

Maksimālais attālums *S,* kurā ķermenis attālinājās no punkta A, ir vienāds ar ceļu, kuru ķermenis veica, atgriežoties no punkta C atpakaļ uz punktu A: $S = \mathrm{CA} = a_1 t_2^2 / 2$. No ātruma izteiksmes $v = a_1 t_2 = a_1 (t - t_1)$ ir viegli secināt, ka

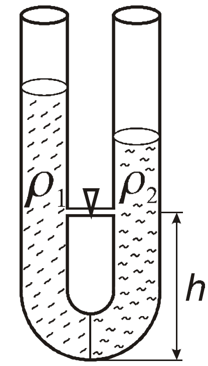
$$S = v(t - t_1)/2 \ . \qquad (1)$$

Šajā izteiksmē nav zināms tikai laika intervāls t_1.

No otrās puses, $S = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \dfrac{at^2}{2} + at^2 - \dfrac{a_1 t_1^2}{2}$, jo posmā BC kustība ir vienmērīgi palielināta un ātrums tā sākumposmā ir at. Tā kā ātrumi punktos A un C ir vienādi ar nulli, tad $at - a_1 t_1 = 0$, un $a = a_1 t_1 / t$. Ievietojot šo sakarību S pēdējo var pārrakstīt formā $S = \dfrac{at^2}{2} + \dfrac{a_1 t_1^2}{2}$. Piezīmēsim, ka posmā BC ķermeņa kustība ir analoga vertikāli uz augšu mesta ķermeņa kustībai. Tas nozīmē, ka ķermeņa ātrumam atgriežoties punktā B pēc punkta C sasniegšanas ir tā pati vērtība, kura tam bija kustoties uz punktu C vai arī kustības laiki virzienos no B uz C un no C uz B ir vienādi. Tādā gadījumā posma BC garuma aprēķināšanai varam izmantot formulu, kas izsaka noieto ceļu vienmērīgi paātrinātā kustībā ar sākuma-ātrumu vienādu ar 0, kas dod $\mathrm{BC} = a_1 t_1^2 / 2$. Tas, protams, sakrīt ar iepriekš iegūto. Savukārt jau iepriekš tika noteikts, ka $a_1 = \dfrac{v}{(t - t_1)}$. Ievietojot a un a_1 izteiksmes pēdējā formulā ceļam *S*, mēs iegūsim

$$S = \frac{v(t_1 t + t_1^2)}{2(t - t_1)} \ . \qquad (2)$$

Pielīdzinot (1) un (2) un saīsinot līdzīgos locekļus, var atrast, ka $t_1 = t/3$.Ievietojot iegūto t_1 izteiksmē (1), tiek noteikts meklējamais attālums $S = vt/3$.



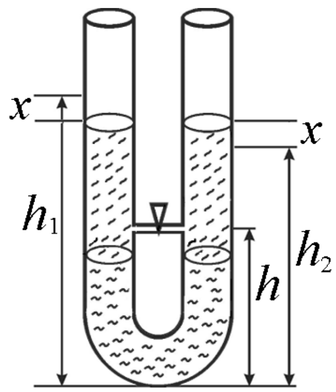
3. uzdevums. "Kurš kuru?". *(9.–12. klase)*

U-veidīgā caurulē līdzsvarā atrodas divi nesajaucami šķidrumi ar blīvumiem ρ_1 un ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) tā, ka robeža starp šķidrumiem atrodas tieši caurules apakšā. Augstumā h virs caurules zemākā punkta atrodas tieva caurulīte, pēc kuras atvēršanas sākas šķidrumu pārtecēšana.

Par cik izmainīsies šķidrumu līmenis, kad šķidrumu pārtecēšana beigsies?

Atrisinājums.

Diemžēl šī uzdevuma formulējums ir nekorekts. Sākotnējais sistēmas stāvoklis, kas ir attēlots zīmējumā, ir nestabils. Tādēļ nestabilitātes attīstības rezultātā beigu stāvoklis izskatīsies tā, kā ir parādīts otrajā zīmējumā. Ir arī viegli paradīt, ka līmeņu izmaiņa kreisajā un labajā zarā nav atkarīga no augstuma *h*, bet ir atkarīga no sākotnējiem līmeņiem h_1 un h_2, kas nav uzdevuma dotos minēti.



Neskatoties uz šo nekorektumu, darbu pārbaudes laikā visas saprātīgas idejas tika vērtētas pozitīvi.

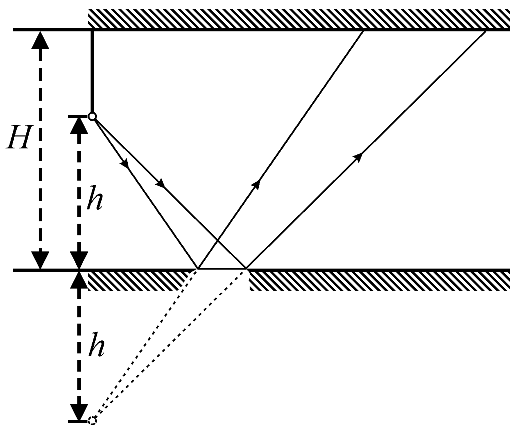
4. uzdevums. "Spēles ar spoguli" *(9.–12. klase)*

Istabā, kuras augstums ir $H = 3{,}2$ m, attālumā $h = 2{,}2$ m virs grīdas karājas spuldzīte. Uz grīdas atrodas plakans taisnstūra formas spogulis, kura laukums ir $S = 24$ cm^2.
Kādā attālumā no griestiem atrodas lampiņas kvēldiega attēls spogulī? Kāda ir "saules zaķīša", kas tiek iegūts uz griestiem ar šo spoguli, forma un cik liels ir tā laukums? Lampiņas kvēldiegu uzskatīt par punktveida gaismas avotu!

Atrisinājums.

Kā zināms, plakanais spogulis dod šķietamo attēlu, kas atrodas aiz spoguļa tādā pašā attālumā, kā pats objekts virs spoguļa (sk. zīmējumu). Tāpēc attālums no spuldzītes attēla spogulī līdz griestiem ir vienāds ar attāluma no grīdas līdz griestiem un attāluma no grīdas līdz spuldzītei summu, $L = h+H = 5{,}4$ m.

Lai atbildētu uz jautājumu par "zaķīša" formu, apskatīsim tā veidošanās mehānismu. "Zaķīti" veido tikai tie stari, kas nāk no spuldzītes un atstarojas no spoguļa. Var uzskatāmi iedomāties, ka šķietamais attēls spīd caur "lodziņu", kuru veido spogulis.



Spogulis un "zaķītis" kalpo par pamatiem divām piramīdām, kuru kopējā virsotne ir spuldzītes attēls. Šīs piramīdas ir ģeometriski līdzīgas, tādēļ arī „zaķīša" forma ir taisnstūris. Ir līdzīgas arī atbilstošās trijstūrveida sānu skaldnes. Tas nozīmē, ka attiecīgās trīsstūru malas ir proporcionālas.
"Zaķīša" laukums ir vienāds ar $S_x = L_x D_x$, kur L_x un D_x ir "zaķīša" garums un platums. Ja ar L un D apzīmē atbilstoši spoguļa garumu un platumu, tad no trijstūru līdzības seko, ka

$$L_x = L\frac{h+H}{h} \text{ un } D_x = D\frac{h+H}{h}.$$

Tādējādi, $S_x = LD\left(\dfrac{h+H}{h}\right)^2 = S\left(\dfrac{h+H}{h}\right)^2$ = 144,6 cm^2, kur $S = LD$ ir spoguļa laukums.

5. uzdevums. "Elektriskā plīts" *(9. un 10. klase)*

Uz elektriskās plīts, kuras jauda ir $P = 600$ W un lietderības koeficients $\eta = 45\%$, uzsildīja $V = 1{,}5$ l ūdens no $t_1 = 10$ °C līdz vārīšanās temperatūrai. Sildīšanas laikā daļa ūdens α=5% iztvaikoja.

Noteikt šī procesa norises ilgumu. Siltuma zudumus neievērot. Pieņemt, ka iztvaikošana galvenokārt notika pie temperatūrām, kas ir tuvas vārīšanas temperatūrai.

Atrisinājums.

Pilna plīts jauda tiek patērēta ūdens uzsildīšanai līdz 100ºC, un $\alpha = 5\%$ no ūdens tilpuma iztvaicēšanai: $Q = Q_{\text{sild.}} + Q_{\text{iztv.}} = cV\rho\Delta t + \alpha V\rho\lambda = \eta Pt$, kur c ir ūdens īpatnējā siltumietilpība, un λ ir tā īpatnējais iztvaikošanas siltums. Ievērojiet, ka mēs esam izmantojuši uzdevumā dotos norādījumus, pieņemot, ka ūdens īpatnējais iztvaikošanas siltums nav atkarīgs no temperatūras, un ņemot λ skaitlisko vērtību, kas atbilst 100º C. No uzrakstītā vienādojuma seko

$$t = \frac{cV\rho\Delta t + \alpha V\rho\lambda}{\eta P} = \frac{4200\cdot 1{,}5\cdot 90 + 0{,}05\cdot 1{,}5\cdot 2{,}3\cdot 10^6}{0{,}45\cdot 600}\ \text{s} = 45{,}6\ \text{min.}$$

6. uzdevums. "Elektriskais dzinējs". *(9. klase).*

Elektriskais dzinējs patērē enerģiju no līdzstrāvas avota, kura spriegums ir $U = 120$ V. Mainoties dzinēja darba režīmam, strāvas stiprums tā tinumā palielinājās par $\Delta I = 3\ A$, bet lietderības koeficients samazinājās par $\Delta\mu = 5\%$.

Noteikt dzinēja tinuma pretestību!

Atrisinājums:

Pilna jauda, kuru sprieguma avots attīsta pie strāva stipruma I, ir vienāda ar UI. Tā sastāv no jaudas μUI , kas tiek patērēta lietderīgā darba veikšanai, un no jaudas IU_t, kas tiek zaudēta sildot dzinēja tinumus. (Šeit $U_t = IR$ ir sprieguma kritums uz tinuma pretestības.) Sakarība starp jaudām dod sekojošu vienādojumu

$$\begin{aligned} IU &= \mu IU + IU_t = \mu IU + I^2 R \\ \mu &= 1 - IR/U \end{aligned}.$$

Iegūta sakarība starp μ un I ir lineāra, tāpēc $\Delta\mu = -\Delta I \cdot R/U$ un meklējamā tinuma pretestība ir $R = -U\dfrac{\Delta\mu}{\Delta I} = 120\dfrac{0{,}05}{3} = 2\Omega$.

7. uzdevums. "Lietus bremzē vilcienu" *(10.–12. klase)*

Pa horizontālu ceļa posmu ar nemainīgu ātrumu $v = 72$ km/h brauc vilciens.

Par cik ir jāizmaina lokomotīves izstrādātā jauda, lai vilciens turpinātu kustēties ar tādu pašu ātrumu stipra vertikāla lietus laikā, kad ik sekundi uz vilcienu nokrīt $m = 100$ kg ūdens, kas pēc tam noplūst pa vagonu sienām? Berzes spēku izmaiņu neņemt vērā.

Atrisinājums.

Risināsim šo uzdevumu ar zemi saistītājā atskaites sistēmā. Uz vilcienu krītošajam ūdenim ātruma horizontāla komponente ir vienāda ar 0, bet uz zemi noplūdušajam ūdenim šī komponente kļūst vienāda ar vilciena ātrumu v. Savukārt vilciena ātrums paliek nemainīgs, jo lietus bremzējošo iedarbību kompensē lokomotīves jaudas pieaugums $\Delta N = \Delta F \ v$, kurš mums ir jānosaka.

Apskatot 2. Ņūtona likumu vilcienam, secinām, ka lokomotīves spēka pieaugums ΔF pēc moduļa ir vienāds ar pretestības spēku pieaugumu ūdens paātrināšanas dēļ, jo vilciena paātrinājums pirms un pēc lietus sākuma paliek vienāds ar nulli. Savukārt 3. Ņūtona likums nosaka, ka spēks, ar kuru vilciens paātrina ūdeni, ir vienāds ar spēku, ar kuru ūdens bremzē vilcienu. Secinām, ka abi šie spēki pēc moduļa ir vienādi ar ΔF.

Tagad var pielietot 2. Ņūtona likumu ūdenim. Integrālajā formā tas nosaka, ka laika intervālā δt spēka impulss $\Delta F \ \delta t$ ir vienāds ar ūdens impulsa izmaiņu Δp. Šo lielumu var izteikt kā $\Delta p = (m \ \delta t) \ v$, kur $m = 100$ kg/s ir 1 sekundes laikā noplūdušā ūdens masa. No šīm sakarībām izriet, ka $\Delta F = mv$. Jaudas pieaugums ir spēka pieaugums reiz ātrums, $\Delta N = mv^2 = 40$ kW.

Atzīmēsim, ka uzdevuma risināšanā nevar izmantot mehāniskās enerģijas nezūdamības likumu, jo mijiedarbība starp vilcienu un ūdens lāsēm ir neelastīga.

8. uzdevums. "Cilindrs ar šķērssienu" *(11. un 12. klase)*

Siltumizolēts trauks ar tilpumu $2V$ vidū pārdalīts ar plānu šķērssienu. Vienā trauka pusē atrodas n_1 molu vienatomu gāzes ar temperatūru T_1 un spiedienu p_1. Otrā pusē atrodas citas vienatomu gāzes n_2 moli ar temperatūru T_2 un spiedienu p_2.

Noteikt maisījuma temperatūru pēc šķērssienas izņemšanas!

Atrisinājums.

Tā kā trauks ir siltumizolēts, pēc gāzu sajaukšanas to kopējā enerģija paliek nemainīga. Ideālās gāzes n molu iekšējā enerģija ir vienāda ar tās molekulu siltumkustības enerģiju: $U = \frac{3nRT}{2}$. Pirms šķērssienas izņemšanas, sistēmas iekšēja enerģijas ir vienāda ar abu gāzu iekšējo enerģiju summu, $U = \frac{3n_1RT_1}{2} + \frac{3n_2RT_2}{2}$. Savukārt pēc šķērssienas izņemšanas abu gāzu temperatūras izlīdzinās, un kļūst vienādas ar T. Šajā stāvoklī pirmās un otrās gāzes enerģijas, attiecīgi, ir $U_1 = \frac{3n_1RT}{2}$ un $U_2 = \frac{3n_2RT}{2}$. Enerģijas nezūdamības likums nosaka vienādību $\frac{3n_1RT_1}{2} + \frac{3n_2RT_2}{2} = \frac{3(n_1 + n_2)RT}{2}$.

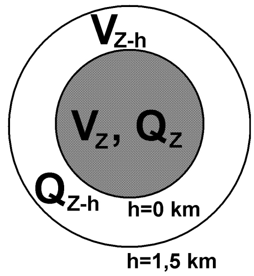
Līdz ar to meklējamā temperatūra pēc sieniņas izņemšanas ir $T = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2}$.

9. uzdevums. "Atmosfēras lādiņš" *(11. un 12. klase)*

Novērtējiet vidējo atmosfēras elektrisko lādiņu blīvumu σ, ja ir zināms, ka vidējā elektriskā lauka intensitāte pie Zemes virsmas ir $E_0 \approx 130$ V/m, bet $h = 1{,}5$ km augstumā tā samazinās līdz $E_h \approx 30$ V/m!

Atrisinājums.

Meklējamais lādiņu blīvums ir vienāds ar $\sigma = \dfrac{Q_{Z-h}}{V_{Z-h}}$, kur Q_{Z-h} un V_{Z-h} ir attiecīgi lādiņš un tilpums slānim, kas atrodas starp Zemes virsmu un sfērisku virsmu ar rādiusu $R_Z + h$, kur R_Z ir Zemes rādiuss.



Sfēriskā slāņa radītā elektriskā lauka intensitāte ir tāda pati, kāda tā būtu, ja viss lādiņš koncentrētos sfēras centrā. Uz Zemes virsmas intensitāte ir $E_0 = \dfrac{Q_Z}{4\pi\varepsilon_0 R_Z^2}$. Augstumā h tā ir $E_h = \dfrac{Q_Z + Q_{Z-h}}{4\pi\varepsilon_0 (R_Z + h)^2} \approx \dfrac{Q_Z + Q_{Z-h}}{4\pi\varepsilon_0 R_Z^2}$ (jo $R_Z >> h$).

$$V_{Z-h} = \frac{4}{3}\pi (R_Z + h)^3 - \frac{4}{3}\pi R_Z{}^3 \approx 4\pi\, R_Z^2 h \text{ un } Q_{Z-h} = \sigma V_{Z-h} = \sigma 4\pi R_Z^2 h .$$

Ievietojot šo izteiksmi intensitātes E_h formulā, iegūstam: $E_h = \dfrac{Q_Z}{4\pi\varepsilon_0 R_Z^2} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} h = E_0 + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} h$.

Tādējādi lādiņu blīvums ir vienāds ar

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 (E_h - E_0)}{h} = -\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 75}{1500} = -4{,}4 \cdot 10^{-13}\ \frac{\text{Kl}}{\text{m}^3} .$$

Uzdevumu var atrisināt arī vienkāršāk, atmosfēras slāni ar biezumu h virs nelielas platības ar laukumu S tuvināti uzskatot par lādētu plakni (tas atbilst nosacījumam $R_Z >> h$). Tas saistīts ar to, ka Zemes tuvumā elektriskā lauka intensitātes izmaiņas izsauc atmosfērā uzkrātie elektriskie lādiņi. Lauka intensitāte augstumā h ir $E_h = E_1 + E_2$, kas ir divu intensitāšu summa. Pirmo komponenti (E_1) veido lādiņš $V\sigma$ starp Zemes virsmu un augstumu h, tās vērtība ir $E_1 = V\sigma/(2\varepsilon_0 S)$. Otro intensitātes sastāvdaļu (E_2) veido visi lādiņi $q_{>h}$, kas atrodas virs laukuma S augstāk nekā h. Konkrēta izteiksme tās aprēķināšanai nav nepieciešama. Savukārt pie Zemes virsmas uzlādētā „plakne" ar kopējo lādiņu $V\sigma$ veido lauku ar pretējo zīmes intensitāti $-\dfrac{V\sigma}{2\varepsilon_0 S}$, līdz ar to

$$E_0 = -\frac{V\sigma}{2\varepsilon_0 S} + E_2 .$$

Iegūstam, ka $E_h - E_0 = \dfrac{V\sigma}{\varepsilon_0 S}$, un, ievērojot, ka $V = h\,S$, mēs iegūstam uzdevuma atbildi.

Šis vienkāršotais risinājums demonstrē, ka arī „plakanās Zemes" tuvinājums var būt noderīgs, ja vien izpildās tā pielietošanas nosacījumi (šajā gadījumā nosacījums $R_Z >> h$).